This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 1808.76

BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
CHARLES MINOT,
OF SOMERVILLE,
(Class of 1828,)
4 June, 1878.

TRANSFERRED TO
CABOT SCIENCE

THEORIE

DER

GONIOMETRISCHEN UND DER LONGIMETRISCHEN

QUATERNIONEN,

ZUGLEICH ALS

EINFÜHRUNG IN DIE RECHNUNG

MIT

PUNKTEN UND VECTOREN.

VON

K. W. UNVERZAGT,

OBERLEHRER AM KÖNIGLICHEN REALGYMNASIUM ZU WIESBADEN.

MIT 21 HOLZSCHNITTEN.

WIESBADEN.

C. W. KREIDEL'S VERLAG.

1876.

~~VI. 24~~
Math 1808.76

1878, June 4.
Minot fund.

8963
53

Vorwort.

Indem das vorliegende Buch unter Voraussetzung von nur elementaren Kenntnissen auf dem Gebiete der Mathematik in ältere Theorien einführt, giebt es zugleich nach drei Seiten eine Erweiterung derselben.

In der ersten Abtheilung sind die allgemeinen goniometrischen Functionen als Ausgangspunkt gewählt. Dieselben werden mit Zugrundelegung eines Basiswinkels λ als die Quotienten der Seiten schiefwinkliger Dreiecke aufgefasst, so dass die gemeinen Winkelfunctionen als specieller Fall derselben für $\lambda = {}^1/_2\pi$ erscheinen. Diese Betrachtungen führen naturgemäss auf die wichtigen longimetrischen Functionen und deren Erweiterungen, die Plan- und Raumfunctionen von Punkten und Strecken.

Die Verbindung der so erlangten Werthe mit dem Drehungsfactor j_λ und dem Verschiebungsfactor j_0, d. h. die Rechnung mit erweiterten complexen Ausdrücken, bildet den Abschluss dieser Untersuchungen.

Der zweite und grössere Theil des Buches ist der Rechnung mit Punkten und Vectoren gewidmet. Er enthält daher die Grundzüge der barycentrischen Methode von Möbius und die Lehre von den Hamilton'schen oder goniometrischen Quaternionen, beide erweitert, einerseits durch Zufügung der Producte und Quotienten von Punkten, andererseits durch die Lehre von den longimetrischen und den Biquaternionen, wodurch dann die elementare Rechnung

mit Punkten und Vectoren zu einer gewissen Vollständigkeit gebracht wird.

Die Verwendbarkeit der vorgetragenen Lehren ist überall an einfachen Beispielen aus der Geometrie und Mechanik nachgewiesen.

Wenn nicht alle Abschnitte des Werkes gleich ausführlich behandelt sind, so hat diess seinen Grund in dem Wunsche des Verfassers, Untersuchungen zu veröffentlichen und dadurch Forschungen anzuregen, deren Durchführung bei dem geringen Masse an Zeit, das er dieser Seite seiner Thätigkeit widmen kann, nicht in seinen Kräften steht. Giebt es doch kein einziges Kapitel der vorliegenden Arbeit, — von den allgemeinen Winkelfunctionen an, bis zu den kurzen Andeutungen über Biquaternionen — das nicht der Weiter- und Umbildung und damit der Verbesserung fähig und bedürftig wäre. Möge die Kritik diese Ansicht des Verfassers über seine Leistungen berücksichtigen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass wenn der Verwendung der Rechnungsarten der allgemeinen Arithmetik in einem neuen Sinne und in Anwendung auf neue Elemente nicht überall ein Nachweis über die Zulässigkeit dieses Verfahrens vorausging, diess deshalb unterblieb, weil aus der Untersuchung selbst sich die Richtigkeit der Methode ergeben muss, ausserdem aber Hankel in seinem Buche über die complexen Zahlen Erörterungen dieser Art ausführlich gegeben hat, auf die wir daher hier verweisen.

Wiesbaden, im August 1876.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Die Lehre von den goniometrischen und von den longimetrischen Functionen. (Seite 1—122).

Erster Abschnitt.

Die Lehre von den allgemeinen Winkelfunctionen. (Seite 1—27).

		Seite.
§. 1.	Definition der allgemeinen Winkelfunctionen	1
	Darstellung derselben durch Strecken	2
§. 2.	Von den Werthen der Winkelfunctionen	2
	Die Vorzeichen derselben	3
§. 3.	Beziehungen unter den Functionen desselben Winkels .	3
§. 4.	Zurückführung der Functionen beliebig grosser Winkel auf die der hohlen Winkel	4
§. 5.	Die Functionen desselben Winkels für verschiedene Werthe der Basis λ	6
	Zusammenhang zwischen den allgemeinen Winkelfunctionen und den gemeinen goniometrischen Functionen	6
§. 6.	Die Functionen von Winkelaggregaten	7
§. 7.	Aggregate von Winkelfunctionen	10
§. 8.	Winkelfunctionen für die Basis $\lambda = {}^1/_8\pi$	10
§. 9.	Andeutungen über die Verwendbarkeit der Winkelfunctionen	11
§. 10.	Die Grundgleichungen der ebenen Trigonometrie . . .	12
§. 11.	Die Differentiale der Winkelfunctionen	13
§. 12.	Complexe Ausdrücke mit allgemeinen Winkelfunctionen	15
	Der Drehfactor j_λ	16
	Die Moivre'sche Formel	16
	Complexe Zahlen $a + j_\lambda b$	17
	Herleitung von $\mathrm{Cos}\, m\varphi$ und $\mathrm{Sin}\, m\varphi$	18
	Bestimmung von $1 + \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,2\varphi + \ldots + \mathrm{Cos}\, n\varphi$ und von $\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,2\varphi + \ldots + \mathrm{Sin}\, n\varphi$	18

Seite.

Verallgemeinerung der Normalform der Quaternionen 19
Herleitung des Werthes von j_λ 20
Eindeutigkeit von j_λ 22
Zusammenhang der Factoren j_λ und j_μ untereinander und mit i und j_0 24
$u = a + j_\lambda b$ als Ausdruck für die geometrische Addition 25
§. 13. Die longimetrischen Functionen als besonderer Fall der Winkelfunctionen 25

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den longimetrischen Functionen. (Seite 28–93.)

§. 14. Definition der longimetrischen Functionen 28
Darstellung derselben durch Strecken 29
Werthe und Vorzeichen derselben 30
§. 15. Abhängigkeit der Functionen desselben Punktes von einander 30
§. 16. Die longimetrischen Functionen von Aggregaten 31
Die Formeln für Longifunctionen abgeleitet aus denjenigen für Winkelfunctionen 32
Gleichungen zwischen Longifunctionen als andre Ausdrücke für bekannte Streckenbeziehungen 32
§. 17. Eine Beziehung zwischen Longifunctionen und gemeinen Winkelfunctionen 33
§. 18. Longimetrische Functionen mit beliebiger Basis 34

Anwendung der longimetrischen Functionen in der analytischen Geometrie. (Seite 35—59).

§. 19. Bestimmung der Lage eines Punktes mit Hilfe paralleler Axen 35
Longimetrische Projection einer Strecke 36
§. 20. Parallele Geradencoordinaten 36
Inhalt eines Polygones aus den Coordinaten seiner Seiten 38
§. 21. Polarcoordinaten der Geraden 39
§. 22. Gleichung des Punktes in Geradencoordinaten 40
§. 23. Bestimmung der Gleichung eines Punktes aus zwei Bedingungen 42
Gleichung des Berührungspunktes einer Curventangente 42
§. 24. Folgerungen aus der Gleichung des Punktes 43
Axenparalleler Abstand eines Punktes von einer Geraden 43
Gleichung eines Punktes, der den Abstand zweier anderen theilt . . . 43
§. 25. Die Gleichungen der wichtigsten Punkte im Dreieck . . 44
§. 26. Bestimmung des Inhaltes eines Dreiecks aus den Gleichungen der Eckpunkte 46
§. 27. Die Bedeutungen der Gleichung
$$x \sin(yz) + y \sin(zx) + z \sin(xy) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48$$
§. 28. Transformation der Coordinaten 50
§. 29. Die Curven zweiter Classe 51
Kennzeichen für Ellipse, Parabel und Hyperbel 51

Seite.

Gleichung des Berührungspunktes des Poles und des Mittelpunktes . . 52
Polargleichung und einfachste Gleichungen der Kegelschnitte, Differential der Fläche und des Bogens einer Curve 53
Der Krümmungsradius 54
Transformation von Punktcoordinaten und Geradencoordinaten 54
§. 30. Trimetrische Coordinaten der Geraden 55
§. 31. Die Coordinaten u_1, u_2, u_3 und die Plücker'schen homogenen Coordinaten 58

Anwendung der Longifunctionen in der Mechanik. (Seite 59—68).

§. 32. Kinematik der Geraden 59
Zerlegung der Rotationsgeschwindigkeiten 60
Acceleration bei der Bewegung einer Geraden 61
Rotations- und Translationsacceleration 63
Axengeschwindigkeit 64
Bewegung der Tangente des Kreises, der Ellipse und der Cykloide . . 65
Streifengeschwindigkeit, Streifenacceleration 66
Der Hodograph für Geraden 67
Ermittelung des Berührungspunktes durch Zerlegung der Rotationsgeschwindigkeit 67
Anwendung auf die Kegelschnitte und die Cykloide 67

Ueber complexe longimetrische Ausdrücke. (Seite 69—92).

§. 33. Die Moivre'sche Formel 69
Der Verschiebungsfactor j_0 70
§. 34. Herleitung des Factors j_0 72
Geometrische Deutung von $a + j_0 b$ 75
Addition und Subtraction paralleler Strecken 75
$\mathrm{Cos}\, m + j\, \mathrm{Sin}\, m$ als Stellenfactor 77
Unabhängige Ableitung von j_0 78
Zusammenhang zwischen j_b und j_c 80
Die Abkürzungen $\mathrm{cis}\, \varphi$ und $\mathrm{CjS}\, m$ 81
Eindeutigkeit von $(\mathrm{Cos}\, m + j\, \mathrm{Sin}\, m)^{\frac{1}{n}}$ 81
§. 35. Verwendbarkeit longimetrisch complexer Ausdrücke . . 83
Bicomplexe Ausdrücke 85
Gemischte Quaternionen 87
Darstellung von Kräften, Geschwindigkeiten und Paaren 89
§. 36. Longimetrische Functionen der Punkte der Kreis- und der Schraubenlinie 92

Dritter Abschnitt.

Die planimetrischen Functionen. (Seite 94—110).

§. 37. Definition und Eigenschaften der Planfunctionen . . . 94
Anwendung derselben in der Geometrie 97
Planfunctionen der Punkte einer Kugelfläche 99

Seite.

§. 38. Complexe Ausdrücke mit Planfunctionen 100
Stellenfactoren der wichtigeren Punkte des Dreiecks 101
Die Moivre'sche Formel für Planfunctionen 102
Zahlen von der Form A + jB + kC 104
Benutzung complexer Ausdrücke mit Planfunctionen zur Darstellung von Kräften 105
Dreifache Deutung von A + jB + kC 106
§. 39. Bicomplexe Ausdrücke mit Planfunctionen 107
Helikometrische oder Schraubenfunctionen 109

Vierter Abschnitt.

Die stereometrischen Functionen. (Seite 111—122).

§. 40. Eigenschaften der Raumfunctionen 111
Anwendung derselben zur Bestimmung des Volumens eines Tetraeders . 113
§. 41. Complexe Ausdrücke mit Raumfunctionen 114
Die Moivre'sche Formel. Punkte und Strecken im Raume 117
Longimetrische Quaternionen 117
§. 42. Biquaternionen 119
Schraubenfunctionen 121

Zweite Abtheilung.

Die Rechnung mit Punkten und Vectoren.

(Seite 123—312).

Fünfter Abschnitt.

Die goniometrischen oder Hamilton'schen Quaternionen.
(Seite 125—228).

§. 43. Die Summen und Differenzen von Punkten 125
Der barycentrische Calcul 126
Festlegung der Punkte einer Geraden 129
Die Gleichung der Kegelschnitte und andre Anwendungen 131
Vertauschung der Grundpunkte 135
§. 44. Addition und Subtraction von Vectoren 136
Bestimmung der Punkte einer Geraden, einer Ebene und im Raume . . 138
Anwendungen der Methode 138
Barycentrischer Ausdruck für die Tangente einer Curve 148
§. 45. Definition der goniometrischen Quaternionen 150
§. 46. Zerlegung einer Quaternion in ein Product 153
Tensor und Versor einer Quaternion 154

Seite.

§. 47. Die Rechnung mit Quaternionen 155
Das Product zweier Quaternionen ist nicht commutativ 156
Das associative und das distributive Princip 159

§. 48. Die Elementarquaternionen 160
Die Rechnung mit i_1, i_2 und i_3 161
i als besonderer Fall von j_λ 163

§. 49. Theorie der Indices der Quaternionen 164
Quotienten und Producte zu einander rechtwinkliger Vectoren 168

§. 50. Zerlegung einer Quaternion in eine Summe 169
Scalar und Vector 170
Das Product beliebiger Vectoren 171
Der Moivre'sche Satz 172
Eine Quaternion darstellbar als Potenz α^t 173

§. 51. Zerlegung einer Quaternion in eine viergliedrige Normalform 173
Beweis des associativen Princips 176
Andre Ableitung des Productes $\alpha\beta$ 177
Unterschied zwischen $q_1 q_2$ und $q_2 q_1$ 177
Andre viergliedrige Form der Quaternionen 178
Die Normalform der longimetrischen Quaternionen 181

§. 52. Verwandte Quaternionen 181
Reciproke Quaternionen 181
Conjugirte Quaternionen 182
$K(q_1 q_2) = Kq_2 . Kq_1$ 184
Negative Quaternion 185
Beweis des distributiven Princips 185

§. 53. Die Grundrechnungen mit Vectoren 188
Kelland's Methode der Einführung in die Quaternionen 189
Vectorenproducte aus drei und mehr Factoren 190
Transformation von Vectorausdrücken 195
Das Imaginäre der Algebra in Verbindung mit Vectoren 197
Hamilton's Biquaternionen und Bivectoren 198

§. 54. Anwendungen der Quaternionen 198
Sätze der Planimetrie 198
Stereometrische Sätze 200
Grundformeln der Trigonometrie 203
Gleichungen der Geraden und Ebenen 205
Kreislinie und Kugelfläche 208
Gleichung der Kegelschnitte 211

§. 55. Differentiation der Quaternionen 211
Newton-Hamilton'sche Definition des Differentials 212
Differentialformeln 214
Anwendung der Differentialrechnung 217
Der Hodograph Hamilton's 218
Lösung von Bewegungsaufgaben 222

§. 56. Lösung von Quaternionengleichungen 223

Seite.

Sechster Abschnitt.

Die longimetrischen Quaternionen. (Seite 229—312).

§. 57. Producte und Quotienten von Punkten 229
Die Quotientvectoren 230
Punkte höherer Ordnung 232
Neuer barycentrischer Calcul 235
§. 58. Die Rechnung mit Quotientvectoren 235
Producte und Quotienten 236
Summen und Differenzen 238
Einige eigenthümliche Formeln 239
Anwendung der Rechnung mit Quotientvectoren 241
Die Grundformeln der Quotialrechnung von Schell 244
Erweiterung derselben 245
Anwendung der Quotialrechnung 246
Der Hodograph bei Quotientvectoren 249
§. 59. Die Logarithmen der Quotientvectoren 249
Diese Logarithmen sind goniometrische Quaternionen 253
Einfache Anwendung derselben 253
§. 60. Die Summen und Differenzen paralleler Differenzvectoren 254
Parallele Vectoren als Vertreter von Geraden und Ebenen 259
Anwendung auf Curven 260
Der Hodograph für Tangentenvectoren 261
§. 61. Die Quotienten paralleler Differenzvectoren 261
Die longimetrischen Quaternionen 263
Tensor und Versor derselben 263
§. 62. Die Grundrechnungen mit Longiquaternionen 264
Das Product zweier Longiquaternionen ist commutativ 266
Das associative und das distributive Princip 266
§. 63. Verwandte Quaternionen 268
Reciproke, negative und conjugirte Quaternionen 268
Der Satz $K(q_1 q_2) = Kq_1 \cdot Kq_2$ 269
Es ist $(q - Kq)^2 = 0$ 269
Erweiterung dieses Satzes 270
§. 64. Die Versoren der Longiquaternionen 271
Der Quotient paralleler Vectoren ist ihr Abstand 271
Jede Longiquaternion ist darstellbar durch $t.c^n$ 271
Die Quotientvectoren als Longiquaternionen 275
§. 65. Die Elementarversoren j_1, j_2, j_3 276
Die Factoren k_1, k_2 und k_3 278
§. 66. Zerlegung der Longiquaternionen in Summen 279
Scalar und Vector 280
Normalform der Longiquaternionen 281
Darstellung eines Vectors im Raume 281
Der erweiterte Moivre'sche Satz 282
Andrer Ausdruck für denselben Satz 282
Zusammenhang zwischen $q - Kq$ und $j - 1$ 283
$(\beta - \gamma) : \alpha$ ergiebt bei gleicher Länge von β und γ Null zum Quadrate 284
Zerlegung einer Longiquaternion in ein viergliedriges Product . . . 284

Seite.

Andrer zweigliedriger Ausdruck für Longiquaternionen 284
S, V, K und T bezeichnen distributive Operationen 285
§. 67. Die Producte paralleler Differenzvectoren 285
Diese Producte sind Longiquaternionen 285
Producte aus parallelen Differenzvectoren oder aus Quotient- und Differenzvectoren sind nicht commutativ 286
$K\alpha\beta = K\beta . K\alpha$ 287
Die Producte aus drei und mehr Factoren 287
Das distributive und das associative Princip 287
Andre Ableitung des Productes zweier Differenzvectoren 288
Anwendung der Rechnung mit Parallelvectoren 289
§. 68. Gleichungen und Differentiale der Longiquaternionen . 293
§. 69. Rechnung mit parallelen Quotientvectoren 296
Summen und Differenzen 296
Producte und Quotienten 297
Anwendung dieser Methode 298
Benutzung der Quotialderivirten 298
Der Logarithmus $^a\log b$ ist eine Longiquaternion 299
§. 70. Biquaternionen 300
Der Quotient und das Product kreuzender Differenzvectoren 300
Darstellung eines beliebigen Vectors 301
Biquaternionen als Logarithmen einander kreuzender Vectoren 303
Quaternionen als Ergebniss der Messung des Winkels β durch den einen Winkel α 303
§. 71. Rückblick 304
§. 72. Geschichtliches 310

Erste Abtheilung.

Die Lehre von den goniometrischen und den longimetrischen Functionen.

Erster Abschnitt.

Die Lehre von den allgemeinen Winkelfunctionen.

§. 1. Definition der allgemeinen Winkelfunctionen.

1. — Denken wir uns (Fig. 1) die Schenkel a und c des Winkels β von einer Geraden b so geschnitten, dass dieselbe mit dem Schenkel a den Winkel λ bildet, wobei die Drehung bei Beschreibung des Winkels λ in demselben Sinne von dem Schenkel a aus erfolgen mag, wie bei der des Winkels β, und bezeichnen wir die auf den drei Geraden gebildeten Abschnitte selbst mit a, b und c, so wollen wir im Folgenden die Streckenquotienten

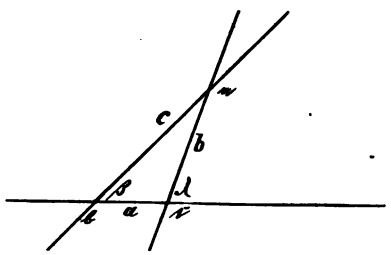

Fig. 1.

$$\frac{b}{c}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b},$$

beziehungsweise Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante des Winkels β für die Basis λ nennen. Als abgekürzte Bezeichnung dieser allgemeinen Winkelfunctionen oder allgemeinen goniometrischen Functionen gebrauchen wir

$$\text{Sin } \beta, \ \text{Cos } \beta, \ \text{Tang } \beta, \ \text{Cot } \beta, \ \text{Sec } \beta, \ \text{Cosec } \beta,$$

wobei wir zur Unterscheidung von den gewöhnlichen goniometrischen Functionen die Abkürzungen Sin, Cos u. s. w. mit grossen Anfangsbuchstaben schreiben, dagegen die Schreibweise sin β, cos β etc. für die gewöhnlichen Winkelfunctionen beibehalten.

Soll der Basiswinkel λ auch in der Bezeichnung der Functionen erkennbar sein, so liesse sich folgende Schreibweise empfehlen

$$\text{Sin}_\lambda \beta, \ \text{Cos}_\lambda \beta \text{ etc.}$$

oder

$$^\lambda\text{Sin } \beta, \ ^\lambda\text{Cos } \beta \text{ etc.},$$

so dass also z. B. $\sin \beta = {}^{1/2\pi}\text{Sin } \beta$ ist,

da die gewöhnlichen Winkelfunctionen den Winkel $^1/_2\pi$ zur Basis haben.

2. — Als Strecken erscheinen die allgemeinen Functionen des Winkels β in Fig. 2, worin um den Scheitel dieses Winkels mit einem Radius, der gleich der Längeneinheit, ein Kreis beschrieben ist, während b f, c a und b e unter dem Winkel λ gegen b c geneigt sind, und f g parallel zu b b geht. Es stellen dann c a, b c, b e, f g, b e und b g die allgemeinen Winkelfunctionen des Winkels β in der oben genannten Folge dar.

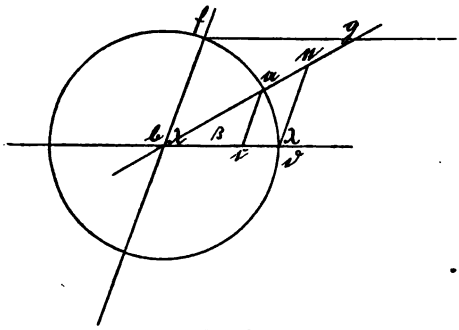

Fig. 2.

§. 2. Von den Werthen der Winkelfunctionen.

1. — Die Winkelfunctionen sind Zahlenwerthe, die sich nach Grösse und Vorzeichen mit den Winkeln ändern. Geben wir nun den Strecken a und b, von denen die erstere auf dem ersten Schenkel des Winkels β liegt, die andere dagegen damit den Winkel λ bildet, die Vorzeichen + oder —, je nachdem ihre Richtung mit der Richtung der entsprechenden Stücke für spitze Winkel β, die zwischen 0 und λ liegen, übereinstimmt oder nicht, führen wir ferner c nur mit positivem Zeichen ein, so ergeben sich für die allgemeinen Winkelfunctionen der Winkel zwischen 0 und 2π Werthe, wie sie im folgenden Täfelchen zusammengestellt sind.

$\beta =$	0	λ	$^1/_2\pi$	$^1/_2\pi + \lambda$	π	$\pi + \lambda$	$^3/_2\pi$	$^3/_2\pi + \lambda$	2π	$= \beta$
Sin	0	1	$\operatorname{cosec}\lambda$	$\cot\lambda$	0	-1	$-\operatorname{cosec}\lambda$	$-\cot\lambda$	0	Sin
Cos	1	0	$-\cot\lambda$	$-\operatorname{cosec}\lambda$	-1	0	$\cot\lambda$	$+\operatorname{cosec}\lambda$	1	Cos
Tang	0	$\pm\infty$	$-\sec\lambda$	$-\cos\lambda$	0	$\pm\infty$	$-\sec\lambda$	$-\cos\lambda$	0	Tang
Cot	∞	0	$-\cos\lambda$	$-\sec\lambda$	$-\infty$	0	$-\cos\lambda$	$-\sec\lambda$	0	Cot
Sec	1	$\pm\infty$	$-\operatorname{tg}\lambda$	$-\sin\lambda$	-1	$\mp\infty$	$+\operatorname{tg}\lambda$	$+\sin\lambda$	1	Sec
Cosec	∞	1	$\sin\lambda$	$\operatorname{tg}\lambda$	$\pm\infty$	-1	$-\sin\lambda$	$-\operatorname{tg}\lambda$	$\mp\infty$	Cosec
$\beta =$	0	λ	$^1/_2\pi$	$^1/_2\pi + \lambda$	π	$\pi + \lambda$	$^3/_2\pi$	$^3/_2\pi + \lambda$	2π	$= \beta$

2. — Um auf eine einfache Art das Gesetz über die Vorzeichen der allgemeinen Functionen aussprechen zu können, denken wir uns die Winkelebene in vier Sectoren getheilt durch zwei Geraden, die einander unter dem Winkel λ schneiden. Indem wir ferner den ersten Schenkel eines Winkels β mit dem ersten Schenkel des Winkels λ zusammenfallen lassen, können wir diesen Winkel β, je nach der Lage seines zweiten Schenkels, als einen Winkel des ersten, zweiten, dritten oder vierten Sectors bezeichnen. Dann sind die Sinusse und Cosecanten der Winkel des ersten und zweiten Sectors positiv, die des dritten und vierten Sectors negativ. Es sind die Cosinusse und Secanten der Winkel des ersten und vierten Sectors positiv, die des zweiten und dritten Sectors negativ. Die Tangenten und Cotangenten endlich sind positiv für Winkel des ersten und dritten, negativ für Winkel des zweiten und vierten Sectors.

In Bezug auf ihre Grösse haben die Sinusse $-\operatorname{cosec}\lambda$ und $+\operatorname{cosec}\lambda$ zu Grenzen; die Tangenten und Cotangenten liegen zwischen $-\infty$ und $+\infty$, die Secanten und Cosecanten endlich liegen zwischen $-\infty$ und $-\sin\lambda$ und zwischen $+\sin\lambda$ und $+\infty$.

Während also, wie bei den gemeinen goniometrischen Functionen, die Tangenten und Cotangenten alle reellen Zahlwerthe durchlaufen, hat sich das Gebiet der allgemeinen Sinusse und Cosinusse über die Grenzen $+1$ und -1 bis zu $+\operatorname{cosec}\lambda$ und $-\operatorname{cosec}\lambda$ erweitert, und es greifen endlich die Secanten und Cosecanten in die echt gebrochenen Zahlen bis zu $\pm\sin\lambda$ ein, so dass von dem Gebiet der letzteren nur die Zahlen zwischen $-\sin\lambda$ und $+\sin\lambda$ ausgeschlossen sind.

§. 3. Zusammenhang unter den Functionen desselben Winkels.

1. — Da nach dem erweiterten Pythagoräischen Lehrsatze (Fig. 1)

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\lambda,$$

so ist

$$\operatorname{Sin}\beta^2 + \operatorname{Cos}\beta^2 + 2\operatorname{Sin}\beta\operatorname{Cos}\beta\cos\lambda = 1,$$
$$\operatorname{Sec}\beta^2 = 1 + \operatorname{Tang}\beta^2 + 2\operatorname{Tang}\beta\,.\cos\lambda,$$
$$\operatorname{Cosec}\beta^2 = 1 + \operatorname{Cot}\beta^2 + 2\operatorname{Cot}\beta\,.\cos\lambda,$$

wie sich leicht ergiebt, wenn man die erste Gleichung der Reihe nach mit c^2, a^2 und b^2 dividirt.

Diese Gleichungen, im Vereine mit

$$\operatorname{Sin}\beta\,.\operatorname{Cosec}\beta = 1,$$
$$\operatorname{Cos}\beta\,.\operatorname{Sec}\beta = 1,$$
$$\operatorname{Tang}\beta\,.\operatorname{Cot}\beta = 1,$$

gestatten es, jede der sechs Functionen durch jede der fünf übrigen auszudrücken. So ist z. B.

$$\operatorname{Cos}\beta = -\operatorname{Sin}\beta\,.\cos\lambda \pm \sqrt{1 - \operatorname{Sin}\beta^2\,.\sin\lambda^2},$$
$$\operatorname{Sin}\beta = -\operatorname{Cos}\beta\,.\cos\lambda \pm \sqrt{1 - \operatorname{Cos}\beta^2\,.\sin\lambda^2}.$$

2. — Es ist ferner, wie man leicht an einer Figur sieht

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin}\varphi &= \operatorname{Cos}(\lambda - \varphi),\\
\operatorname{Cos}\varphi &= \operatorname{Sin}(\lambda - \varphi),\\
\operatorname{Tang}\varphi &= \operatorname{Cot}(\lambda - \varphi),\\
\operatorname{Cot}\varphi &= \operatorname{Tang}(\lambda - \varphi),\\
\operatorname{Sec}\varphi &= \operatorname{Cosec}(\lambda - \varphi),\\
\operatorname{Cosec}\varphi &= \operatorname{Sec}(\lambda - \varphi).
\end{aligned}$$

Leicht nachzuweisen ist auch die Richtigkeit folgender Beziehungen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin}\varphi &= \operatorname{Sin}(\pi - \varphi),\\
\operatorname{Cos}\varphi &= \operatorname{Cos}(\pi + 2\lambda - \varphi),\\
\operatorname{Sin}(-\varphi) &= -\operatorname{Sin}\varphi,\\
\operatorname{Cos}(-\varphi) &= \operatorname{Cos}\varphi + 2\operatorname{Sin}\varphi \,.\, \cos\lambda,\\
\operatorname{Sin}(\pi - \varphi) &= \operatorname{Sin}\varphi,\\
\operatorname{Cos}(\pi - \varphi) &= -\operatorname{Cos}\varphi - 2\operatorname{Sin}\varphi \,.\, \cos\lambda.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Sinusse und Cosecanten von Nebenwinkeln einander gleich sind, und dass die Sinusse und Cosecanten von negativen Winkeln gleich den negativen gleichnamigen Functionen der positiven Winkel sind. Für die übrigen Functionen finden zwischen den Functionen von Nebenwinkeln, sowie zwischen denen von positiven und negativen Winkeln keine so einfachen Beziehungen statt.

3. — Nicht ohne Interesse sind auch die Ausdrücke für einige Functionen des Basiswinkels und seiner Multipla.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Sin}\lambda = 1;\ \operatorname{Cos}\lambda = 0;\ \operatorname{Tang}\lambda = \infty,\\
&\operatorname{Sin}2\lambda = 2\cos\lambda,\\
&\operatorname{Cos}2\lambda = -1,\\
&\operatorname{Tang}2\lambda = -2\cos\lambda,\\
&\operatorname{Sin}{}^1\!/_2\lambda = \operatorname{Cos}{}^1\!/_2\lambda = {}^1\!/_2\sec{}^1\!/_2\lambda,\\
&\operatorname{Tang}{}^1\!/_2\lambda = \operatorname{Cot}{}^1\!/_2\lambda = 1,\\
&\operatorname{Tang}{}^1\!/_2(\pi + \lambda) = \operatorname{Cot}{}^1\!/_2(\pi + \lambda) = -1.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen leitet man leicht eine Reihe von bekannten Ausdrücken für gewöhnliche goniometrische Functionen ab.

§. 4. Zurückführung der Functionen beliebig grosser Winkel auf die Functionen hohler Winkel.

1. — An einer Figur ist leicht nachweisbar, dass

$$\operatorname{Sin}\varphi \,.\, \sin\lambda = \sin\varphi$$

oder

$$\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin\lambda}.$$

Wenden wir diese Formel an auf

$$\operatorname{Sin}(k\,R \pm \varphi),$$

worin $R = \frac{1}{2}\pi$ und k eine ganze positive Zahl ist, so erhalten wir

$$\mathrm{Sin}\,(k\,R \pm \varphi) = \frac{\sin\,(k\,R \pm \varphi)}{\sin\,\lambda}.$$

Es ist aber nach bekannten Gesetzen, je nachdem $k = 2n$ oder $2n \pm 1$,

$$\sin\,(2n\,R \pm \varphi) = (\pm)\sin\,\varphi$$

und

$$\sin\,[(2n+1)\,R \pm \varphi] = (\pm)\cos\,\varphi,$$

wobei die Vorzeichen der rechten Seite nach dem Quadranten bestimmt werden müssen, in welchem der Winkel $k\,R \pm \varphi$ liegt.

Es ist mithin

$$\mathrm{Sin}\,(2n\,R \pm \varphi) = \frac{(\pm)\sin\,\varphi}{\sin\,\lambda} = (\pm)\,\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Da $\mathrm{Sin}\,(-\varphi) = -\mathrm{Sin}\,\varphi$ ist, so können wir auch setzen

$$\mathrm{Sin}\,(2n\,R \pm \varphi) = (\pm)\,\mathrm{Sin}\,(\pm\varphi),$$

wenn wir nur das rechts stehende Vorzeichen nach dem Sector richtig bestimmen, in welchem der Winkel $k\,R \pm \varphi$ liegt.

Es ist ferner

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}\,[(2n+1)\,R \pm \varphi] &= \frac{\sin\,[(2n+1)\,R \pm \varphi]}{\sin\,\lambda} = \frac{(\pm)\cos\,\varphi}{\sin\,\lambda} \\ &= \frac{(\pm)\sin\,(R \pm \varphi)}{\sin\,\lambda} \\ &= (\pm)\,\mathrm{Sin}\,(R \pm \varphi).\end{aligned}$$

2. — Für die Cosinusse erhalten wir folgende Ausdrücke. Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}\,(2n\,R \pm \varphi) &= \mathrm{Sin}\,(\lambda - 2n\,R \mp \varphi) \\ &= -\mathrm{Sin}\,[2n\,R - (\lambda \mp \varphi)] \\ &= (\pm)\,\mathrm{Sin}\,(\lambda \mp \varphi) = (\pm)\,\mathrm{Cos}\,(\pm\varphi).\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}\,[(2n+1)\,R \pm \varphi] &= \mathrm{Sin}\,[\lambda - (2n+1)\,R \mp \varphi] \\ &= -\mathrm{Sin}\,[(2n+1)\,R - (\lambda \mp \varphi)] \\ &= \mp\,\mathrm{Sin}\,[R - (\lambda \pm \varphi)] \\ &= \pm\,\mathrm{Sin}\,[\lambda - (R \pm \varphi)] \\ &= (\pm)\,\mathrm{Cos}\,(R \pm \varphi).\end{aligned}$$

In diesen zwei Formeln für $\mathrm{Cos}\,(k\,R \pm \varphi)$ muss auf der rechten Seite das Zeichen bei $\pm\varphi$ in Uebereinstimmung sein mit dem Zeichen der linken, während das Vorzeichen der ganzen rechten Seite aus dem Sector zu bestimmen ist, in welchem $k\,R \pm \varphi$ liegt.

3. — Durch Verbindung der Formeln für den Sinus und den Cosinus von $k\,R \pm \varphi$ erhalten wir

$$\mathrm{Tang}\,(2n\,R \pm \varphi) = (\pm)\,\mathrm{Tang}\,(\pm\varphi),$$

$$\mathrm{Tang}\,([2n+1]\,R + \varphi) = (\pm)\,\mathrm{Tang}\,(R \pm \varphi),$$

wobei von den rechts stehenden Zeichen dasselbe gilt, was in (2.) bemerkt wurde.

Damit sind aber die Mittel geliefert, um die Functionen eines beliebig grossen Winkels durch die Functionen eines hohlen Winkels auszudrücken.

§. 5. Die Functionen desselben Winkels für verschiedene Werthe der Basis λ.

1. — Für die Basiswinkel λ und μ haben wir

$$^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi \,.\, \sin\lambda = \sin\varphi,$$
$$^{\mu}\mathrm{Sin}\,\varphi \,.\, \sin\mu = \sin\varphi.$$

Mithin ist

$$^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi \,.\, \sin\lambda = {}^{\mu}\mathrm{Sin}\,\varphi \,.\, \sin\mu$$

oder

$$^{\mu}\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{\sin\lambda}{\sin\mu} \cdot {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Aus dieser allgemeinen Formel folgen leicht folgende. Da

$$^{\mu}\mathrm{Sin}\,\lambda = \frac{\sin\lambda}{\sin\mu} \cdot {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\lambda = \frac{\sin\lambda}{\sin\mu}$$

und

$$^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\mu = \frac{\sin\mu}{\sin\lambda},$$

so haben wir

$$^{\mu}\mathrm{Sin}\,\lambda \,.\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\mu = 1.$$

So ist z. B.

$$^{1/2\pi}\mathrm{Sin}\,\lambda \,.\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,{}^{1}/_{2}\pi = \sin\lambda \,.\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,{}^{1}/_{2}\pi = 1.$$

Ferner ist

$$\frac{^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi}{^{\lambda}\mathrm{Sin}\,{}^{1}/_{2}\pi} = \frac{^{\mu}\mathrm{Sin}\,\varphi}{^{\mu}\mathrm{Sin}\,{}^{1}/_{2}\pi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\,{}^{1}/_{2}\pi} = \sin\varphi.$$

2. — Wir können nun leicht die allgemeinen Functionen dnrch die gemeinen goniometrischen ausdrücken, und umgekehrt die letzteren durch die ersten. Es ist nämlich

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin\lambda},$$

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Sin}\,(\lambda - \varphi) = \frac{\sin(\lambda - \varphi)}{\sin\lambda}.$$

Es ist auch

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \cos\varphi - \sin\varphi \,.\, \cot\lambda,$$

wie sich ans einer Figur ergiebt. Es ist ferner

$$\mathrm{Tang}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin(\lambda - \varphi)},$$

$$\mathrm{Cot}\,\varphi = (\cot\varphi - \cot\lambda) \,.\, \sin\lambda,$$

$$\mathrm{Sec}\,\varphi = \frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda - \varphi)},$$

$$\mathrm{Cosec}\,\varphi = \frac{\sin\lambda}{\sin\varphi}.$$

3. — Es ist endlich

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}{}^1/_{2\pi}},$$

$$\cos\varphi = \sin({}^1/_{2\pi} + \varphi) = \frac{\operatorname{Sin}({}^1/_{2\pi} + \varphi)}{\operatorname{Sin}{}^1/_{2\pi}}.$$

Aus einer Figur ergiebt sich auch

$$\cos\varphi = \operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Sin}\varphi\cos\lambda.$$

Ausdrücke für die übrigen gemeinen goniometrischen Functionen ergeben sich hieraus leicht.

Die vorstehenden Transformationsformeln lassen eine gewisse Analogie erkennen zwischen den Beziehungen unter den Winkelfunctionen und denen, welche unter den Logarithmen einer Zahl für verschiedene Basen bestehen. So ist einerseits

$$^{\lambda}\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin\lambda},$$

$$^{\lambda}\operatorname{Sin}\mu \,.\, {}^{\mu}\operatorname{Sin}\lambda = 1,$$

andererseits

$$^{a}\log b = \frac{\mathrm{l}\, b}{\mathrm{l}\, a}$$

und

$$^{a}\log b \,.\, {}^{b}\log a = 1.$$

§. 6. Die Functionen von Winkelaggregaten.

1. — Ohne vorläufig die allgemeine directe Begründung der Formeln für die Functionen von Winkelsummen und Differenzen geben zu können, beschränken wir uns im Folgenden auf die Ableitung der Ausdrücke für $\operatorname{Cos}(\alpha \pm \beta)$ und $\operatorname{Sin}(\alpha \pm \beta)$ unter der Voraussetzung, dass $\alpha \pm \beta$ kleiner als λ sei. Bemerken wollen wir nur, dass der allgemeine Beweis für die Richtigkeit dieser Sätze sich gewiss mittelst schiefer Coordinaten ähnlich führen liesse, wie diess von J. H. T. Müller in seinem Lehrbuch der Trigonometrie für gemeine Winkelfunctionen geschehen ist.

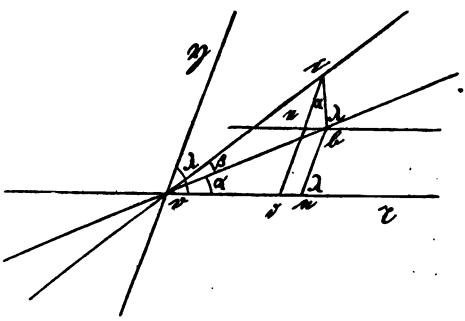

Fig. 3.

Es sei in Fig. 3. $\mathfrak{x}\,o\,b = \alpha$, $b\,o\,c = \beta$.

Ferner seien $c\,b$ und $c\,b$ so gezogen, dass sie mit $o\,\mathfrak{x}$ resp. $o\,b$ den Winkel λ bilden; ebenso sei $b\,a$ unter λ gegen $o\,\mathfrak{x}$ geneigt.

Dann ist

$$\text{Cos}(\alpha+\beta) = \frac{ob}{oc} = \frac{oa-ba}{oc}$$
$$= \frac{oa}{oc} - \frac{ba}{oc} = \frac{oa}{oc} - \frac{eb}{oc}$$
$$= \frac{oa \cdot ob}{ob \cdot oc} - \frac{eb \cdot cb}{cb \cdot oc}$$
$$= \text{Cos}\,\alpha \cdot \text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha \cdot \text{Sin}\,\beta.$$

Dass hierbei $\frac{eb}{cb} = \text{Sin}\,\alpha$ ist, ergiebt sich leicht, wenn man sich daran erinnert, dass die Sinusse der Nebenwinkel einander gleich sind.

2. — Es ist ferner

$$\text{Sin}(\alpha+\beta) = \frac{cb}{oc} = \frac{ab+ec}{oc}$$
$$= \frac{ab \cdot ob}{ob \cdot oc} + \frac{ec \cdot cb}{cb \cdot oc}$$
$$= \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) \cdot \text{Sin}\,\beta.$$

Dass $\frac{ec}{cb} = -\text{Cos}\,(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ sieht man leicht aus der Figur.

Diese Formel lässt sich umgestalten in

$$\text{Sin}(\alpha+\beta) = \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta + 2\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta \cdot \cos\lambda,$$

weil $\text{Cos}\,(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = -\text{Cos}\,\alpha - \text{Sin}\,\alpha \cdot \cos\lambda$ ist.

3. — Ist in Figur 4. Winkel $a\,o\,b = \alpha$ und $c\,o\,b = \beta$, so ist

$$\text{Sin}(\alpha-\beta) = \frac{ca}{oc} = \frac{bb-be}{oc}$$
$$= \frac{bb \cdot ob}{ob \cdot oc} - \frac{be \cdot bc}{bc \cdot oc}$$
$$= \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta.$$

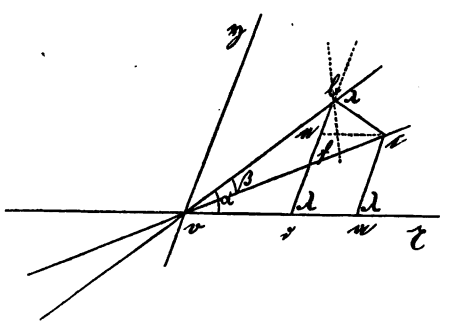

Fig. 4.

Dass hierbei $\frac{be}{bc} = \text{Cos}\,\alpha$ ist, folgt aus dem Dreieck $b\,c\,f$, welches ähnlich dem Dreieck $o\,b\,b$ ist, weil die Seiten des einen mit denen des anderen den Winkel λ bilden, da $b\,f = b\,e$ gemacht ist.

4. — Nach derselben Fig. 4. ist

$$\text{Cos}(\alpha-\beta) = \frac{oa}{oc} = \frac{ob+ba}{oc}$$
$$= \frac{ob \cdot ob}{ob \cdot oc} + \frac{ba \cdot bc}{bc \cdot oc}$$
$$= \text{Cos}\,\alpha \cdot \text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,(2\lambda - \alpha)\,\text{Sin}\,\beta.$$

Dass $$\frac{b\,a}{b\,c} = \frac{e\,c}{b\,c} = \mathrm{Sin}\,(2\lambda - \alpha)$$
ist, ergiebt sich folgendermassen. Es ist Winkel $e\,b\,c = \pi - \lambda - o\,b\,b$
$$= \pi - \lambda - (\lambda - \alpha) = \pi - (2\lambda - \alpha),$$
daher ist
$$\mathrm{Sin}\,e\,b\,c = \mathrm{Sin}\,[\pi - (2\lambda - \alpha)] = \mathrm{Sin}\,(2\lambda - \alpha).$$
Es ist aber
$$\mathrm{Sin}\,(2\lambda - \alpha) = \mathrm{Sin}\,2\lambda\,.\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Cos}\,2\lambda\,\mathrm{Sin}\,\alpha,$$
$$\mathrm{Sin}\,2\lambda = 2\,.\,\cos\lambda,$$
$$\mathrm{Cos}\,2\lambda = -1.$$
Mithin finden wir
$$\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta) = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta + 2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta\,.\,\cos\lambda.$$

5. — Für die Tangenten des Aggregates zweier Winkel ergiebt sich nun leicht
$$\mathrm{Tang}\,(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{Tang}\,\alpha + \mathrm{Tang}\,\beta + 2\,\mathrm{Tg}\,\alpha\,.\,\mathrm{Tg}\,\beta\cos\lambda}{1 - \mathrm{Tg}\,\alpha\,.\,\mathrm{Tg}\,\beta},$$
$$\mathrm{Tang}\,(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{Tg}\,\alpha - \mathrm{Tg}\,\beta}{1 + \mathrm{Tang}\,\alpha\,.\,\mathrm{Tang}\,\beta + 2\,\mathrm{Tang}\,\beta\,.\,\cos\lambda}.$$

6. — Indem man die Giltigkeit der Formeln für Winkelaggregaten für den Fall der gewöhnlichen goniometrischen Functionen als allgemein bewiesen annimmt, lassen sich die vorstehenden Sätze auch leicht folgendermassen ableiten. Es ist
$$\mathrm{Sin}\,(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\lambda} = \frac{\sin\alpha\,.\,\cos\beta + \cos\alpha\,.\,\sin\beta}{\sin\lambda}$$
$$= \mathrm{Sin}\,\alpha\,.\,\cos\beta + \cos\alpha\,.\,\mathrm{Sin}\,\beta$$
$$= \mathrm{Sin}\,\alpha\,(\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Sin}\,\beta\,.\,\cos\lambda) + \mathrm{Sin}\,\beta\,(\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\alpha\,.\,\cos\lambda)$$
$$= \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta + 2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta\,.\,\cos\lambda.$$

Für $\mathrm{Sin}\,(\alpha - \beta)$ hat man
$$\mathrm{Sin}\,(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\lambda} = \mathrm{Sin}\,\alpha\,.\,\cos\beta - \cos\alpha\,.\,\mathrm{Sin}\,\beta\,.$$
$$= \mathrm{Sin}\,\alpha\,(\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Sin}\,\beta\,.\,\cos\lambda) - \mathrm{Sin}\,\beta\,(\mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\alpha\,.\,\cos\lambda)$$
$$= \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta.$$

Aehnlich lassen sich die übrigen Formeln ableiten.

7. — Aus den Sätzen über die Functionen der Summe zweier Winkel ergiebt sich
$$\mathrm{Cos}\,2\varphi = \mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \mathrm{Sin}\,\varphi^2,$$
$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Cos}\,{}^1/_2\varphi^2 - \mathrm{Sin}\,{}^1/_2\varphi^2,$$
$$\mathrm{Sin}\,2\varphi = 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi + 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,.\,\cos\lambda$$
$$= 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,(\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\cos\lambda)$$
$$= 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\cos\varphi,$$
$$\mathrm{Sin}\,\varphi = 2\,\mathrm{Sin}\,{}^1/_2\varphi\,.\,\cos\,{}^1/_2\varphi.$$

§. 7. Aggregate von Winkelfunctionen.

1. — Durch Verbindung der im vorigen Paragraphen gefundenen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)+\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)=2\operatorname{Sin}\alpha\,.\cos\beta,\\
&\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)-\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)=2\operatorname{Sin}\beta\,.\cos\alpha,\\
&\operatorname{Cos}(\alpha+\beta)+\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)=2\operatorname{Cos}\alpha\,.\cos\beta,\\
&\operatorname{Cos}(\alpha+\beta)-\operatorname{Cos}(\alpha-\beta)=-2\operatorname{Sin}\beta\,.\cos(\lambda-\alpha),
\end{aligned}$$

wenn man bei der Vereinfachung der direct erhaltenen Resultate berücksichtigt, dass

$$\operatorname{Cos}\varphi+\operatorname{Sin}\varphi\,.\cos\lambda=\cos\varphi$$

ist.

2. — Setzt man in den in (1) gefundenen Formeln

$$\alpha+\beta=\varphi;\ \alpha-\beta=\psi;$$

mithin

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi);\ \beta=\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi),$$

so bekommt man die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Sin}\varphi+\operatorname{Sin}\psi=2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,.\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi),\\
&\operatorname{Sin}\varphi-\operatorname{Sin}\psi=2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\,.\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi),\\
&\operatorname{Cos}\varphi+\operatorname{Cos}\psi=2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,.\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi),\\
&\operatorname{Cos}\varphi-\operatorname{Cos}\psi=-2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\,.\cos(\lambda-\tfrac{1}{2}[\varphi+\psi]).
\end{aligned}$$

3. — Aus

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi^2+\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi^2+2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi\,.\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi\,.\cos\lambda=1$$

und

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi^2-\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi^2=\operatorname{Cos}\varphi$$

folgt

$$\begin{aligned}
&1+\operatorname{Cos}\varphi=2\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi,\\
&1-\operatorname{Cos}\varphi=2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\varphi\,.\cos(\lambda-\tfrac{1}{2}\varphi).
\end{aligned}$$

4. — Einige Functionen der Vielfachen von λ, die sich mit Hilfe der Aggregationsformeln leicht ableiten lassen, mögen hier noch erwähnt werden. Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sin} n\lambda&=\operatorname{Sin}(\overline{n-1}\,\lambda+\lambda)=\operatorname{Sin}\overline{n-1}\,\lambda\,.\operatorname{Cos}\lambda+\operatorname{Cos}\overline{n-1}\,\lambda\operatorname{Sin}\lambda\\
&\quad+2\operatorname{Sin}\overline{n-1}\,\lambda\,.\operatorname{Sin}\lambda\,.\cos\lambda\\
&=\operatorname{Cos}\overline{n-1}\,\lambda+2\operatorname{Sin}(n-1)\,\lambda\,.\cos\lambda.
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Cos} n\lambda=\operatorname{Cos}(\overline{n-1}\,\lambda+\lambda)=-\operatorname{Sin}(n-1)\,\lambda.$$

Daher ist auch umgekehrt

$$\operatorname{Sin}(n-1)\,\lambda=-\operatorname{Cos} n\lambda.$$

Ferner ist

$$\operatorname{Tang} n\lambda=\frac{\operatorname{Sin} n\lambda}{\operatorname{Cos} n\lambda}=-\frac{\operatorname{Sin} n\lambda}{\operatorname{Sin}(n-1)\lambda}=-\frac{\sin n\lambda}{\sin(n-1)\lambda}.$$

§. 8. Die Winkelfunctionen für die Basis $\frac{1}{2}\pi$.

Die gemeinen goniometrischen Functionen haben zur Basis $\frac{1}{2}\pi$ und die darauf bezüglichen bekannten Relationen ergeben sich, wenn wir in den vorste-

henden Formeln λ durch $^1/_2\pi$ ersetzen. Nicht ohne einiges Interesse ist es, λ einmal gleich $^1/_3\pi$ zu setzen. Dadurch erhalten wir folgende Resultate, wobei wir nur diejenigen hier her setzen, die eine Eigenthümlichkeit zeigen.

1. — Es sind die drei Grundformeln jetzt

$$\operatorname{Sin}\beta^2 + \operatorname{Cos}\beta^2 + \operatorname{Sin}\beta \,.\, \operatorname{Cos}\beta = 1,$$
$$\operatorname{Sec}\beta^2 = 1 + \operatorname{Tang}\beta^2 + \operatorname{Tang}\beta,$$
$$\operatorname{Cosec}\beta^2 = 1 + \operatorname{Cot}\beta^2 + \operatorname{Cot}\beta,$$

und hieraus

$$\operatorname{Cos}\beta = {}^1/_2\left(-\operatorname{Sin}\beta \pm \sqrt{4 - 3\operatorname{Sin}\beta^2}\right).$$

2. — Es ist ferner

$$\operatorname{Cos}(\pi - \varphi) = -(\operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Sin}\varphi),$$
$$\operatorname{Cos}(-\varphi) = \operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Sin}\varphi,$$
$$\operatorname{Sin}2\lambda = 1;\ \operatorname{Cos}2\lambda = -1;\ \operatorname{Tang}2\lambda = -1.$$

3. — Wir finden auch

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin}(\alpha+\beta) &= \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta \\ &= \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}(-\beta) + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta = \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}(-\alpha)\operatorname{Sin}\beta.\end{aligned}$$

Sodann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(\alpha-\beta) &= \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta \\ &= \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}(-\beta) - \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}(-\beta).\end{aligned}$$

Endlich haben wir

$$\operatorname{Tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{Tg}\alpha + \operatorname{Tg}\beta + \operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta}{1 - \operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta},$$
$$\operatorname{Tang}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{Tang}\alpha - \operatorname{Tang}\beta}{1 + \operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta + \operatorname{Tg}\beta}.$$

Hieraus ergeben sich noch die zwei Formeln

$$1 + \operatorname{Tg}(\alpha+\beta) = \frac{1 + \operatorname{Tg}\alpha + \operatorname{Tg}\beta}{1 - \operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta},$$
$$1 + \operatorname{Tg}(\alpha-\beta) = \frac{1 + \operatorname{Tg}\alpha + \operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta}{1 + \operatorname{Tg}\beta + \operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta}.$$

§. 9. Verwendbarkeit der allgemeinen Winkelfunctionen.

Im Vorstehenden haben wir die wichtigeren Formeln der Goniometrie verallgemeinert. Damit ist ein neues Hilfsmittel für mathematische Untersuchungen gewonnen, welches zwar zum Theil complicirtere Ausdrücke liefert als die gemeinen goniometrischen Functionen, das aber in der Basis λ ein Element enthält, wodurch die Winkelfunctionen gleichsam mobilisirt werden und die Starrheit verlieren, die gewiss nicht bloss von dem Verfasser schon oft als ein Hinderniss empfunden wurde. Namentlich sind die neuen Functionen da von Vortheil, wo es sich um Aufsuchung von Grenzwerthen handelt, und es ist der Verfasser gerade bei dem Suchen nach der Bedeutung des Verschiebungsfactors für longimetrische Functionen

dazu veranlasst worden, die allgemeinen Winkelfunctionen zu studiren. Ein einfacher Grenzübergang führte dabei leicht von dem allgemeinen Drehfactor der Winkelfunctionen

$$j_\lambda = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}}$$

zu

$$j_0 = (-1)^0 = \sqrt[\infty]{-1}.$$

Durch richtige Wahl des Basiswinkels λ können aber die Ausdrücke auch oft vereinfacht werden. So werden die Transformationsformeln bei schiefen Parallelcoordinaten zu

$$x = x_1 \operatorname{Sin}(x_1\, y) + y_1 \operatorname{Sin}(y_1\, y),$$
$$y = x_1 \operatorname{Sin}(x_1\, x) + y_1 \operatorname{Sin}(y_1\, x),$$

wenn wir den Winkel der alten Axen als Basis der rechts stehenden Functionen annehmen.

Mit Hilfe der allgemeinen Winkelfunctionen sind die schiefen Projectionen der Strecke a auf die Axen x und y

$$a_x = a \operatorname{Cos}(a\, x),$$
$$a_y = a \operatorname{Cos}(a\, y) = a \operatorname{Sin}(a\, x),$$

vorausgesetzt, dass λ der Winkel x y ist.

Ebenso sind die Componenten einer Kraft P nach den Richtungen x und y

$$P_1 = P \operatorname{Cos}(P\, x),$$
$$P_2 = P \operatorname{Cos}(P\, y) = P \operatorname{Sin}(P\, x),$$

wenn hierbei wieder λ = dem Winkel x y angenommen wird.

Dass aber schliesslich die neuen Functionen zu vielen neuen Untersuchungen Anlass geben können, ist selbstverständlich.

§. 10. Die Grundgleichungen der ebenen Trigonometrie.

Bezeichnet man die Seiten eines ebenen Polygones mit $a_1, a_2 \ldots a_n$, und die Aussenwinkel, welche $a_1, a_2 \ldots a_n$ bezüglich mit $a_n, a_1 \ldots a_{n-1}$ bildcn mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, so gelten allgemein die beiden Gleichungen

$$a_1 \operatorname{Cos}\alpha_1 + a_2 \operatorname{Cos}(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \operatorname{Cos}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \ldots + a_n \operatorname{Cos}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 0,$$
$$a_1 \operatorname{Sin}\alpha_1 + a_2 \operatorname{Sin}(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \operatorname{Sin}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \ldots + a_n \operatorname{Sin}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 0.$$

Diese erweiterten Lexell'schen Gleichungen ergeben auf das Dreieck angewendet

$$0 = a_1 \operatorname{Cos}\alpha_1 + a_2 \operatorname{Cos}(\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \operatorname{Cos}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

oder, indem wir a_1, a_2, a_3 durch a, b und c ersetzen und zugleich statt der Aussenwinkel die Innenwinkel einführen,

$$\begin{aligned} c &= -a \operatorname{Cos}(\pi - \beta) + b \operatorname{Cos}\alpha \\ &= a(\operatorname{Cos}\beta + 2 \operatorname{Sin}\beta \,.\, \cos\lambda) + b \operatorname{Cos}\alpha \\ &= a(\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Sin}\beta \cos\lambda) + b(\operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha \cos\lambda). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergiebt sich dadurch aus der vorletzten, dass man $a \operatorname{Sin} \beta$ gleich $b \operatorname{Sin} \alpha$ setzt, welche letztere Beziehung man direct an der Figur als richtig erkennen kann, die aber auch sofort aus der zweiten Lexell'schen Gleichung folgt, indem

$$0 = a_1 \operatorname{Sin} \alpha_1 + a_2 \operatorname{Sin} (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \operatorname{Sin} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

zu $$0 = a \operatorname{Sin} \beta + b \operatorname{Sin} (2\pi - \beta - \gamma)$$
$$= a \operatorname{Sin} \beta + b \operatorname{Sin} (\pi + \alpha),$$

d. h. zu

$$a \operatorname{Sin} \beta = b \operatorname{Sin} \alpha$$

wird.

Die beiden Grundgleichungen

$$c = a (\operatorname{Cos} \beta + \operatorname{Sin} \beta \,.\, \cos \lambda) + b (\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \alpha \,.\, \cos \lambda)$$

und $$a \operatorname{Sin} \beta = b \operatorname{Sin} \alpha$$

lassen sich übrigens leicht an einer Figur direct ableiten und sind ausserdem einfach aus den entsprechenden gewöhnlichen trigonometrischen Gleichungen herleitbar.

Aus der ersteren derselben ergiebt sich

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab (\operatorname{Cos} \gamma + \operatorname{Sin} \gamma \,.\, \cos \lambda),$$

während ans der zweiten sich herleiten lässt

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{Sin} {}^1/_2 (\alpha + \beta)}{\operatorname{Sin} {}^1/_2 (\alpha - \beta)} \cdot \frac{\operatorname{Sin} [{}^1/_2 \pi + {}^1/_2 (\alpha - \beta)]}{\operatorname{Sin} [{}^1/_2 \pi + {}^1/_2 (\alpha + \beta)]}.$$

Wir begnügen uns mit der Angabe der vorstehenden Gleichungen, mit deren Hilfe es möglich ist, aus drei von einander unabhängigen Stücken alle übrigen Stücke des Dreiecks zu ermitteln.

§. 11. Die Differentiale der allgemeinen Winkelfunctionen.*)

1. — Bei der Herleitung der Differentiale ist zu unterscheiden, ob die Basis λ auch variabel ist, oder nicht. Wir setzen sie als constant voraus; anderen Falls bietet die Differentiation aber auch keine Schwierigkeit dar.

$$(1)\quad d \operatorname{Sin} x = d \frac{\sin x}{\sin \lambda} = \frac{\cos x \, dx}{\sin \lambda} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin \lambda} dx = \operatorname{Sin} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$
$$= \operatorname{Sin} \left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx.$$

$$(2)\quad d \operatorname{Cos} x = d \operatorname{Sin} (\lambda - x) = -\operatorname{Sin} \left(\frac{\pi}{2} - \lambda + x\right) dx$$
$$= \operatorname{Sin} \left(\lambda - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) dx = \operatorname{Cos} \left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx.$$

*) Ist für das Verständniss des Späteren nicht nöthig.

$$(3)\quad \mathrm{d\ Tang\ x} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{Sin\ x}}{\mathrm{Cos\ x}} = \frac{\mathrm{Cos\ x}\,.\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right) - \mathrm{Sin\ x}\,.\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right)}{\mathrm{Cos\ x^2}}\mathrm{dx}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}\,.\,\mathrm{dx}}{\mathrm{Cos\ x^2}} = \frac{1}{\sin\lambda}\,\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{Cos\ x^2}}.$$

$$(4)\quad \mathrm{d\ Cot\ x} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{Cos\ x}}{\mathrm{Sin\ x}} = \frac{\mathrm{Sin\ x}\,.\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right) - \mathrm{Cos\ x}\,.\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right)}{\mathrm{Sin\ x^2}}\mathrm{dx}$$

$$= \frac{-\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}}{\mathrm{Sin\ x^2}}\,\mathrm{dx} = -\frac{\mathrm{dx}}{\sin\lambda\,.\,\mathrm{Sin\ x^2}}.$$

$$(5)\quad \mathrm{d\ Sec\ x} = \mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{Cos\ x}} = -\frac{\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}}{\mathrm{Cos\ x^2}}.$$

$$(6)\quad \mathrm{d\ Cosec\ x} = \mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{Sin\ x}} = -\frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}}{\mathrm{Sin\ x^2}}.$$

2. — Es ergeben sich ferner für die cyklometrischen Funktionen folgende Resultate.

Um das Differential von $\mathrm{y} = \mathrm{arc\ Sin\ x}$ zu finden setzen wir

$$\mathrm{x} = \mathrm{Sin\ y},\ \text{dann ist}$$

$$\mathrm{dx} = \mathrm{Sin}\left(\tfrac{\pi}{2}+\mathrm{y}\right)\mathrm{dy},$$

mithin

$$(1)\quad \mathrm{dy} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{Sin}\,(^1/_2\pi+\mathrm{y})} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{Sin}\,(^1/_2\pi-\mathrm{y})} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{Sin}\,^1/_2\pi\,\mathrm{Cos\ y} - \mathrm{Cos}\,^1/_2\pi\,\mathrm{Sin\ y}}$$

$$= \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{Sin}\,^1/_2\pi(\mathrm{x}\,\cos\lambda \pm \sqrt{1-\mathrm{x}^2\sin\lambda^2}) - \mathrm{x\ Cos}\,^1/_2\pi}$$

$$= \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{Sin}\,^1/_2\pi\,.\,\sqrt{1-\mathrm{x}^2\sin\lambda^2}} = \frac{\sin\lambda\ \mathrm{dx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2\sin\lambda^2}}.$$

Dasselbe Resultat lässt sich leicht folgendermassen finden.

$$\mathrm{x} = \mathrm{Sin\ y}$$

ergiebt $$\mathrm{x} = \frac{\sin\mathrm{y}}{\sin\lambda}$$

oder $$\mathrm{y} = \mathrm{arc\ sin}\,(\mathrm{x}\,.\,\sin\lambda)$$

und $$\mathrm{dy} = \frac{\sin\lambda\,.\,\mathrm{dx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2\sin\lambda^2}}.$$

Daher ist auch

$$(2)\qquad \mathrm{d\ arc\ Cos\ x} = \mathrm{d}\,(\lambda - \mathrm{arc\ Sin\ x}) = \frac{-\sin\lambda\,.\,\mathrm{dx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2\sin\lambda^2}}.$$

Für $\mathrm{y} = \mathrm{arc\ Tang\ x}$ finden wir

$$x = \operatorname{Tang} y,$$

$$dx = \frac{dy}{\sin\lambda \,.\, \operatorname{Cos} y^2},$$

$$dy = \sin\lambda \,.\, \operatorname{Cos} y^2 \,.\, dx,$$

$$(3)\quad dy = \frac{\sin\lambda \,.\, dx}{1 + x^2 + 2x\cos\lambda}.$$

Letzteres Resultat ergiebt sich unter Benutzung der Geichung

$$\operatorname{Sec} y^2 = 1 + \operatorname{Tg} y^2 + 2\operatorname{Tg} y \,.\, \cos\lambda.$$

Ferner ist

$$(4)\quad d \operatorname{Arc Cot} x = d(\lambda - \operatorname{arc Tg} x) = -d \operatorname{Arc Tg} x.$$

Aus $y = \operatorname{arc Sec} x$ folgt

$$x = \operatorname{Sec} y,$$

$$dx = -\frac{\operatorname{Cos}(\frac{1}{2}\pi + y)}{\operatorname{Cos} y^2}\, dy,$$

$$dy = -\frac{\operatorname{Cos} y^2 \,.\, dx}{\operatorname{Cos}(\frac{1}{2}\pi + y)},$$

$$= -\frac{dx}{x^2(\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\pi \,.\, \operatorname{Cos} y - \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\pi \operatorname{Sin} y)}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich mit Benutzung von

$$\operatorname{Sin} y = -\operatorname{Cos} y \cos\lambda \pm \sqrt{1 - \operatorname{Cos} y^2 \,.\, \sin\lambda^2}$$

auf

$$(5)\quad dy = \frac{\sin\lambda\, dx}{x\sqrt{x^2 - \sin\lambda^2}}.$$

Aus $y = \operatorname{arc Cosec} x$ findet man

$$\operatorname{Cosec} y = x,$$

$$x = \frac{1}{\operatorname{Sin} y} = \frac{\sin\lambda}{\sin y},$$

$$\frac{x}{\sin\lambda} = \operatorname{cosec} y,$$

$$y = \operatorname{arc cosec}\frac{x}{\sin\lambda},$$

$$(6)\quad dy = \frac{-\sin\lambda \,.\, dx}{x\sqrt{x^2 - \sin\lambda^2}}.$$

§. 12. Verbindung der allgemeinen Winkelfunctionen zu complexen Ausdrücken.

1. Die Frage liegt nahe, ob es für die allgemeinen goniometrischen Functionen einen Factor j giebt, der die Eigenschaft hat, dass

$$(\operatorname{Cos}\alpha + j\operatorname{Sin}\alpha)(\operatorname{Cos}\beta + j\operatorname{Sin}\beta) = \operatorname{Cos}(\alpha + \beta) + j\operatorname{Sin}(\alpha + \beta).$$

In der That lässt sich ein solcher Factor finden. Dass derselbe für die Basis λ unserer Functionen nicht allgemein gleich i, d. h. gleich $\sqrt{-1}$

ist, davon kann man sich leicht durch den Versuch überzeugen. Es ist vielmehr

$$j = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}},$$

und man sieht sofort, dass die bekannte imaginäre Einheit

$$i = \sqrt[2]{-1}$$

nur ein besonderer Fall von j ist.

Es ist dagegen z. B. für $\lambda = \frac{\pi}{3}$

$$j = \sqrt[3]{-1};$$

für $\lambda = 1/4\pi$, erhalten wir

$$j = \sqrt[4]{-1}.$$

Es ist endlich für $\lambda = 0$, und damit betreten wir das Gebiet der longimetrischen Functionen,

$$j_0 = \sqrt[\infty]{-1}.$$

Durch diese Bestimmung von j_0 ist eine Schwierigkeit gelöst, an welcher der Verfasser bei früheren Untersuchungen über longimetrische Functionen scheiterte.

Für $\lambda = \pi$ ist

$$j_\pi = \sqrt[1]{-1} = (-1)^1 = -1.$$

Ueber die Bedeutung und Verwendbarkeit von j_0 und j_π werden wir in einem späteren § handeln, wo wir die longimetrischen Functionen einer besonderen Untersuchung unterwerfen.

2. Dass aber $\sqrt[\frac{\pi}{\lambda}]{-1}$ in der That die oben genannte Eigenschaft hat, ergiebt sich in folgender Weise. Unter der Voraussetzung der Giltigkeit der Moivre'schen Formel ist

$$\sqrt[\frac{\pi}{\lambda}]{-1} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{\lambda}{\pi}} = \cos\lambda + i\sin\lambda.$$

Es ist nun

$$(\mathrm{Cos}\,\alpha + j\,\mathrm{Sin}\,\alpha)(\mathrm{Cos}\,\beta + j\,\mathrm{Sin}\,\beta)$$
$$= \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + j\,(\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta) + j^2\,.\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta,$$

indem wir für die Multiplication etc. unserm j die Eigenschaften eines gewöhnlichen Factors beilegen.

Setzen wir aber $j = \cos\lambda + i\sin\lambda$ ein, so ergibt sich als Product

$$\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta + (\cos\lambda + \mathrm{i}\sin\lambda)(\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta) + (\cos 2\lambda + \mathrm{i}\sin 2\lambda)\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta.$$

Indem wir hierin das Imaginäre und das Reelle trennen, erhalten wir

$$\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta + (\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta)\cos\lambda + \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta(\cos\lambda^2 - \sin\lambda^2) + \mathrm{i}(\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta + 2\cos\lambda\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta)\sin\lambda.$$

Hierfür können wir setzen

$$\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta + (\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta + 2\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\,.\cos\lambda)\cos\lambda + \mathrm{i}(\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Sin}\beta + 2\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Sin}\beta\,.\cos\lambda)\sin\lambda$$

$$= \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) + \operatorname{Sin}(\alpha+\beta)(\cos\lambda + \mathrm{i}\sin\lambda) = \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) + \mathrm{j}\operatorname{Sin}(\alpha+\beta).$$

Hieraus folgt nun leicht, dass

$$(\operatorname{Cos}\varphi_1 + \mathrm{j}\operatorname{Sin}\varphi_1)(\operatorname{Cos}\varphi_2 + \mathrm{j}\operatorname{Sin}\varphi_2)\ldots(\operatorname{Cos}\varphi_n + \mathrm{j}\operatorname{Sin}\varphi_n) \cdot$$

$$= \operatorname{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + \mathrm{j}\operatorname{Sin}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n),$$

sowie die erweiterte Moivre'sche Formel

$$(\operatorname{Cos}\varphi + \mathrm{j}\operatorname{Sin}\varphi)^n = \operatorname{Cos} n\varphi + \mathrm{j}\operatorname{Sin} n\varphi,$$

deren Richtigkeit für gebrochene etc. Exponenten leicht nachweisbar ist.

3. — Wir können uns nun, ähnlich den gewöhnlichen complexen Zahlen, neue Zahlen denken von der Form

$$a + \mathrm{j}\,b$$

und dieselben durch Rechnung miteinander verbinden. Indem wir dabei j überall behandeln wie einen Factor, für welchen alle Gesetze der gemeinen Arithmetik gelten, gelingt es leicht nachzuweisen, dass die Rechnungen mit obigen Ausdrücken immer wieder auf Ausdrücke von der Form

$$a + \mathrm{j}\,b$$

führen, wenn man in Bezug auf die Potenzen von j die Formeln benutzt

$$\mathrm{j} = \operatorname{Cos}\lambda + \mathrm{j}\operatorname{Sin}\lambda, \text{ und}$$

$$\mathrm{j}^n = (\operatorname{Cos}\lambda + \mathrm{j}\operatorname{Sin}\lambda)^n = \operatorname{Cos} n\lambda + \mathrm{j}\operatorname{Sin} n\lambda.$$

4. — Die Rechnung mit den complexen Zahlen

$$a + \mathrm{j}\,b$$

wird aber wesentlich erleichert, wenn man diese Zahlen auf eine reducirte Form bringt. Indem wir also

$$\mathrm{j} = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}}$$

voraussetzen, ist

$$a + \mathrm{j}\,b = \varrho\left(\frac{a}{\varrho} + \mathrm{j}\,\frac{b}{\varrho}\right) = \varrho(\operatorname{Cos}\varphi + \mathrm{j}\operatorname{Sin}\varphi),$$

wenn wir

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\,.\cos\lambda}$$

annehmen und $\frac{a}{\varrho} = \operatorname{Cos}\varphi$, $\frac{b}{\varrho} = \operatorname{Sin}\varphi$, mithin $\frac{b}{a} = \operatorname{Tang}\varphi$ setzen.

Auf diesem Wege finden wir z. B.

$$(a + j\,b)\,(c + j\,d) = \varrho_1\,(\mathrm{Cos}\,\varphi_1 + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1)\,.\,\varrho_2\,(\mathrm{Cos}\,\varphi_2 + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi_2)$$
$$= \varrho_1\,\varrho_2\,[\mathrm{Cos}\,(\varphi_1 + \varphi_2) + j\,\mathrm{Sin}\,(\varphi_1 + \varphi_2)]\,.$$

Ebenso ist

$$\frac{a + j\,b}{c + j\,d} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,.\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi_1 + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1}{\mathrm{Cos}\,\varphi_2 + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi_2}$$
$$= \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,.\,\frac{(\mathrm{Cos}\,\varphi_1 + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi_1)\,[\mathrm{Cos}\,(-\varphi_2) + j\,\mathrm{Sin}\,(-\varphi_2)]}{\mathrm{Cos}\,0 + j\,\mathrm{Sin}\,0}$$
$$= \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\cdot[\mathrm{Cos}\,(\varphi_1 - \varphi_2) + j\,\mathrm{Sin}\,(\varphi_1 - \varphi_2)]\,.$$

5. — Die Formel

$$(\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^m = \mathrm{Cos}\,m\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,m\,\varphi$$

gestattet auch hier eine Verwendung zur Auffindung von Cos m φ und Sin m φ. Es ergiebt sich nämlich durch Anwendung der Binomialformel auf die linke Seite vorstehender Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^m + m_1\,j\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi + m_2\,j^2\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-2}\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2$$
$$+ \ldots + j^m\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi^m = \mathrm{Cos}\,m\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,m\,\varphi.$$

Indem man aber auf die Potenzen von j die Formel

$$j^n = \mathrm{Cos}\,n\,\lambda + j\,\mathrm{Sin}\,n\,\lambda$$

anwendet, erhält man mit Benutzung der Binomialcoefficienten m_1, m_2 etc.

$$\mathrm{Cos}\,m\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,m\,\varphi = \mathrm{Cos}\,\varphi^m + m_2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-2}\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,.\,\mathrm{Cos}\,2\lambda$$
$$+ m_3\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-3}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3\,\mathrm{Cos}\,3\lambda + \ldots + m_m\,\mathrm{Cos}\,\varphi^0\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi^m\,.\,\mathrm{Cos}\,m\,\lambda$$
$$+ j\,[m_1\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi + m_2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-2}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,.\,\mathrm{Sin}\,2\lambda$$
$$+ m_3\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-3}\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3\,\mathrm{Sin}\,3\lambda + \ldots + \mathrm{Sin}\,\varphi^m\,.\,\mathrm{Sin}\,m\,\lambda].$$

Daher

$$\mathrm{Cos}\,m\,\varphi = \sum_{k=0}^{k=m} m_k\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-k}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^k\,\mathrm{Cos}\,k\,\lambda\,,$$

$$\mathrm{Sin}\,m\,\varphi = \sum_{k=0}^{k=m} m_k\,\mathrm{Cos}\,\varphi^{m-k}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^k\,\mathrm{Sin}\,k\,\lambda,$$

wenn wir noch die Annahme machen, dass $a + j\,b = c + j\,d$ nur unter der Voraussetzung, dass $a = c$ und $b = d$.

6. — Auch die Summen

$$1 + \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,2\,\varphi + \ldots + \mathrm{Cos}\,n\,\varphi$$

und

$$\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,2\,\varphi + \ldots + \mathrm{Sin}\,n\,\varphi$$

lassen sich finden.

Es ist nämlich die Summe der geometrischen Reihe

$$(\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^0 + (\mathrm{Cos} + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^1 + \ldots + (\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^n$$
$$= \frac{(\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n+1} - 1}{\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi - 1} = \frac{\mathrm{Cos}\,\overline{n+1}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\overline{n+1}\,\varphi - 1}{\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi - 1}$$

$$= \frac{1 - \mathrm{Cos}\,(n+1)\,\varphi - j\,\mathrm{Sin}\,(n+1)\varphi}{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi - j\,\mathrm{Sin}\,\varphi} \text{ (Vergl. §. 6, 7., und §. 7. 3.)}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi\,.\,[\cos\,(\lambda - {}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi) - j\cos\,{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi]}{2\,\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,\varphi\;[\cos\,(\lambda - {}^1\!/_2\,\varphi) - j\cos\,{}^1\!/_2\,\varphi]}.$$

Mit Benutzung der in §. 5, 3. gegebenen Formel

$$\cos\,\alpha = \frac{\mathrm{Sin}\,({}^1\!/_2\,\pi \pm \alpha)}{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,\pi}$$

wird hieraus

$$\frac{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,\varphi} \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,[{}^1\!/_2\,\pi + \lambda - {}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi] - j\,\mathrm{Sin}\,[{}^1\!/_2\,\pi - {}^1\!/_2(n+1)\,\varphi]}{\mathrm{Sin}\,({}^1\!/_2\,\pi + \lambda - {}^1\!/_2\,\varphi) - j\,\mathrm{Sin}\,({}^1\!/_2\,\pi - {}^1\!/_2\,\varphi)},$$

und mit Benutzung von $\mathrm{Sin}\,(-\alpha) = -\mathrm{Sin}\,\alpha$ wird dieses

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,\varphi} \cdot \frac{\mathrm{Cos}\,[{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi - {}^1\!/_2\,\pi] + j\,\mathrm{Sin}\,[{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi - {}^1\!/_2\,\pi]}{\mathrm{Cos}\,({}^1\!/_2\,\varphi - {}^1\!/_2\,\pi) + j\,\mathrm{Sin}\,({}^1\!/_2\,\varphi - {}^1\!/_2\,\pi)}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,\varphi} \cdot (\mathrm{Cos}\,{}^1\!/_2\,n\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,n\,\varphi).$$

Es ist aber auch

$$(\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^0 + (\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^1 + (\mathrm{Cos}\,\varphi + j\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^n$$
$$= 1 + \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,2\varphi + \ldots + \mathrm{Cos}\,n\,\varphi + j\,(\mathrm{Sin}\,\varphi + \ldots + \mathrm{Sin}\,n\,\varphi).$$

Setzt man nun die in den vorstehenden Entwickelungen sich ergebenden reellen Theile, sowie die mit j behafteten einander gleich, so erhalten wir

$$1 + \mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,2\varphi + \ldots + \mathrm{Cos}\,n\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,\varphi} \cdot \mathrm{Cos}\,{}^1\!/_2\,n\,\varphi,$$

und

$$\mathrm{Sin}\,\varphi + \mathrm{Sin}\,2\varphi + \mathrm{Sin}\,3\varphi + \ldots + \mathrm{Sin}\,n\,\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,(n+1)\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,\varphi} \cdot \mathrm{Sin}\,{}^1\!/_2\,n\,\varphi.$$

7. — Wir wollen die kurzen Andeutungen über die Verwendbarkeit des j damit schliessen, dass wir eine Erweiterung erwähnen, welche durch Einführung des j in der Theorie der Quaternionen gemacht werden kann.

R. Hamilton nennt eine Quaternion den Quotienten, der von einem Punkte ausgehenden Strecken b und a, wenn dieser Quotient nicht nur die Grössenbeziehung von b zu a, sondern auch die Lage beider gegeneinander ausdrücken soll. Nebenbei bemerkt ist der Name darauf gegründet, dass, wenn ganz allgemein a und b im Raume von einem Punkte ausgehen, zur vollständigen Bestimmung dieses geometrischen Quotienten vier Stücke: das Verhältniss von b zu a, der Winkel a b und die Stellung der Ebene a b im Raume, letztere bestimmbar durch zwei Stücke, nothwendig sind.

Von einer solchen Quaternion zeigt nun Hamilton, dass sie immer darstellbar ist in der Form

$$\frac{b}{a} = t\,[\cos(a\,b) + i \sin(a\,b)],$$

wobei t das Längenverhältniss von b zu a ist, dass also

$$b = a\,t\,[\cos(a\,b) + i \sin(a\,b)].$$

Durch Einführung des j erweitert sich diese Formel in die allgemeinere

$$b = a\,t\,[\mathrm{Cos}(a\,b) + j\,\mathrm{Sin}(a\,b)].$$

Die rechte Seite ist dann der Ausdruck für die bekannte geometrische Summirung zweier Seiten eines Dreiecks.

Und auch die allgemeine Form einer Quaternion

$$\frac{b}{a} = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z,$$

wobei w die Projection von b auf a ist, x, y und z dagegen die Projectionen einer auf a b senkrechten Strecke von der Grösse t sin (a b) in Bezug auf ein Coordinatensystem sind, das seinen Anfang im gemeinschaftlichen Anfang von a und b hat, während i_1, i_2 und i_3 drei (imaginäre) Einheiten sind, für welche das Quadrat gleich -1 ist; auch diese Form lässt sich verallgemeinern in

$$\frac{b}{a} = w + j_1 x + j_2 y + j_3 z.$$

Hierin sind die Buchstaben der rechten Seiten entsprechende Stücke, wie oben, nur sind überall schiefe Winkel zu Grund gelegt, während j_1, j_2 und j_3 drei Richtungs-Coefficienten vorstellen von ähnlicher Bedeutung wie das j, dessen wir uns fortwährend in diesem Abschnitte bedient haben.

8. — Ist der im Vorstehenden gegebene Werth von j durch Errathen oder durch Induction gefunden worden? wird man wol fragen. — Vor 5 Jahren, als der Verfasser den ersten Versuch anstellte, einen Werth des j zu finden, der die Moivre'sche Formel auf longimetrische Functionen übertragbar machte, scheiterte derselbe. Im Laufe des vorletzten Winters ergab sich, dass für longimetrische Functionen, d. h. für $\lambda = 0$, j den Werth 1 hat, mit der Eigenschaft eine damit multiplicirte Gerade parallel zu sich um die Länge 1 zu verschieben, und damit war dort die Bahn gebrochen. Von der Ueberzeugung oder Hoffnung ausgehend, dass auch für die allgemeinen goniometrischen Functionen es einen gewissen Richtungsfactor j geben müsse, nahm der Verfasser nun die von H. Professor Drobisch zuerst angegebene Ableitungsmethode für die Bedeutung der imaginären Einheit zu Hilfe und fand dadurch den Werth von j auf folgende Weise.

Die Strecken $+a$ und $-a$ sind von entgegengesetzter Richtung. Diese Richtungsverschiedenheit ist also ausgedrückt durch den Factor (-1).

Weicht dagegen die Strecke a_λ von der Strecke a um den Winkel λ ab, so kann man mit Herrn Prof. Drobisch schliessen, dass

$$a_\lambda = a \,.\, f(\lambda).$$

Diese Function $f(\lambda)$ muss so beschaffen sein, dass

$$a_{\alpha+\beta} = a \,.\, f(\alpha) \,.\, f(\beta) = a \,.\, f(\alpha+\beta),$$

oder dass $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) \,.\, f(\beta)$, und dass allgemein

$$f(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu) = f(\alpha) \,.\, f(\beta) \ldots . f(\mu)$$

ist. Wird hierin $\alpha = \beta = \ldots . = \mu$, so ist

$$f(m\,\alpha) = f(\alpha)^m.$$

Diese Formel ergiebt für $\alpha = 1$

$$f(m) = C^m,$$

wenn wir $f(1)$ mit C bezeichnen. Der Beweis der Richtigkeit dieser Formel, wenn m gebrochen oder irrationel ist, findet sich in Schlömilch's Compendium der höheren Analysis. Es ist mithin allgemein

$$f(\lambda) = C^\lambda,$$

und da, für $\lambda = \pi$,

$$f(\pi) = -1$$

ist, so haben wir

$$C^\pi = -1, \text{ und } C = (-1)^{\frac{1}{\pi}},$$

also

$$C^\lambda = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{\lambda}{\pi}} = \cos\lambda + i\sin\lambda.$$

9. — Aus der Functionengleichung $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) \,.\, f(\beta)$ kann man aber auch nach der von Professor Schell in seiner Mechanik gegebenen Ableitung den Werth von $f(\lambda)$ folgendermassen finden.

Es ist

$$f(\alpha+\beta) - f(\alpha) = f(\alpha) \,.\, f(\beta) - f(\alpha) = f(\alpha)\,[f(\beta) - 1],$$

und mithin

$$\frac{f(\alpha+\beta) - f(\alpha)}{\beta} = f(\alpha) \,.\, \frac{[f(\beta) - 1]}{\beta}.$$

Lässt man hierin $\beta = 0$ werden, so erhält man

$$f'(\alpha) = f(\alpha) \,.\, B,$$

wenn man mit B den Werth bezeichnet, den $\frac{f(\beta) - 1}{\beta}$ für $\beta = 0$ annimmt. Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$l\,f(\alpha) = B\,\alpha + C,$$

also

$$f(\alpha) = e^C \, e^{B\alpha} = A \,.\, k^\alpha,$$

wenn wir e^C mit A und e^B mit k bezeichnen.

Da nun $a f(0) = a \cdot 1$ ist, so muss $f(0) = 1$, mithin $A k^0 = 1$ sein; mithin ist

$$f(\alpha) = k^\alpha.$$

Für $\alpha = \pi$ ist aber

$$f(\pi) = -1,$$

daher ist

$$k^\pi = -1$$

und

$$k = (-1)^{\frac{1}{\pi}},$$

also allgemein

$$f(\lambda) = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}}$$

$$= [\cos(2n+1)\pi + i \sin(2n+1)\pi]^{\frac{\lambda}{\pi}}$$
$$= \cos(2n+1)\lambda + i \sin(2n+1)\lambda.$$

Hiervon ist der von uns früher benutzte Werth

$$j = \cos\lambda + i \sin\lambda$$

ein besonderer Fall.

10. — Der Werth von

$$j = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}} = \cos(2n+1)\lambda + i \sin(2n+1)\lambda$$

ist vieldeutig. So finden wir z. B. für $\lambda = {}^1/_3\pi$

$$j_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3},$$

$$j_2 = \cos\pi + i \sin\pi,$$

$$j_3 = \cos\frac{5}{3}\pi + i \sin\frac{5}{3}\pi;$$

und doch ist, wenn wir unter j den Factor verstehen, der die Moivre'sche Formel auch für allgemeine Winkelfunctionen mit der Basis ${}^1/_3\pi$ giltig sein lässt, oder auch den Factor, der eine Strecke um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ dreht, für j nur der Werth

$$\cos {}^1/_3\pi + i \sin {}^1/_3\pi$$

zulässig.

Eine Erklärung des Hinzutrittes der beiden übrigen Werthe des j wird wol anknüpfen müssen an eine Eigenthümlichkeit der Winkeltheilung. Die Schenkel des spitzen Winkels φ stellen ausser dem Winkel φ noch dar die Winkel

$$\varphi + 2\pi, \quad \varphi + 4\pi, \quad \ldots, \quad \varphi + 2n\pi \text{ etc.},$$

wenn die ursprüngliche Drehungsrichtung und derselbe Strahl als Anfangsschenkel beibehalten werden.

Halbirt man diese Winkel, so erhält man

$^1/_2\varphi$, $^1/_2\varphi + \pi$, $^1/_2\varphi + 2\pi$, $^1/_2\varphi + 3\pi$, ... , $^1/_2\varphi + n\pi$ etc.

Von diesen Winkeln decken die Schenkel des ersten, dritten etc., sowie des zweiten, vierten etc. Winkels einander.

Die Dreitheilung der ersten Winkelreihe führt dagegen auf

$^1/_3\varphi$, $^1/_3\varphi + {}^2/_3\pi$, $^1/_3\varphi + {}^4/_3\pi$,

$^1/_3\varphi + 2\pi$, $^1/_3\varphi + {}^8/_3\pi$, $^1/_3\varphi + {}^{10}/_3\pi$,

$^1/_3\varphi + 4\pi$, $^1/_3\varphi + {}^{14}/_3\pi$, $^1/_3\varphi + {}^{16}/_3\pi$ etc.

In der Construction reduciren sich diese sämmtlichen Winkel auf die drei ersten.

Allgemein gelangen wir so zu n verschiedenen Werthen, wenn wir die Winkel, deren Schenkel mit denen des Winkels φ zusammen fallen, in n gleiche Theile theilen sollen, nämlich zu

$$\frac{1}{n}\varphi,\ \frac{1}{n}\varphi + \frac{2}{n}\pi,\ \frac{1}{n}\varphi + \frac{4}{n}\pi,\ \ldots,\ \frac{1}{n}\varphi + \frac{2n-2}{n}\pi.$$

Wenn wir nun von λ sagen, es sei der dritte Theil von π, so könnte es demnach sein

$$^1/_3\pi,\ ^1/_3\pi + {}^2/_3\pi,\ ^1/_3\pi + {}^4/_3\pi,$$

und es könnte dann j die Werthe, die wir oben fanden, nämlich

$$(-1)^{1/3},\ (-1)^1,\ (-1)^{5/3}$$

annehmen. Sobald wir aber von den drei Werthen, welche die Dreitheilung von π ergiebt, den einen von 60^0 herausgreifen, dann muss auch j eindeutig gleich

$$\cos 60^0 + i \sin 60^0$$

gesetzt werden, und es ist folglich allgemein j der eindeutige Werth

$$j = \cos\lambda + i \sin\lambda.$$

11. — Es könnte schliesslich scheinen, als seien die Drehfactoren j doch eigentlich nur complexe Ausdrücke gewöhnlicher Art, und i, der Drehfactor für $\lambda = {}^1/_2\pi$, hätte einen gewissen Vorrang, indem alle anderen j nur Functionen desselben sind. Dem ist nicht so, wie sich am leichtesten dadurch ergiebt, dass sich zeigen lässt

$$j_\rho = {}^\lambda\mathrm{Cos}\,\varphi + j_\lambda\,{}^\lambda\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

also auch z. B.

$$i = {}^\lambda\mathrm{Cos}\,{}^1/_2\pi + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\,{}^1/_2\pi.$$

Denn wenn wir mit j_ρ und j_λ die Richtungscoefficienten für die Winkel φ und λ bezeichnen, so ist

$$j_\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

$$j_\lambda = \cos\lambda + i\sin\lambda,$$

mithin

$$j_\varphi \,.\, \sin\lambda - j_\lambda \,.\, \sin\varphi = \cos\varphi\sin\lambda - \sin\varphi\,.\,\cos\lambda = \sin(\lambda - \varphi).$$

Und daraus

$$\begin{aligned} j_\varphi &= \frac{\sin(\lambda-\varphi)}{\sin\lambda} + j_\lambda \frac{\sin\varphi}{\sin\lambda} \\ &= {}^{\lambda}\mathrm{Sin}(\lambda-\varphi) + j_\lambda \,.\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi \\ &= {}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\varphi + j_\lambda\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi. \end{aligned}$$

Es ist also ganz allgemein jeder dieser Richtungsfactoren ausdrückbar durch einen beliebigen anderen, und es kommt dem Werthe i, d. h. dem j für den Winkel $\frac{1}{2}\pi$, kein weiterer Vorrang vor einm anderen j zu, als dass wir länger mit ihm bekannt sind.

12. — Von der Gleichung

$$j_\varphi = {}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\varphi + j_\lambda\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi$$

scheint die Ausnahme zu existiren, wonach für $\lambda = 0$

$$j_\varphi = {}^{0}\mathrm{Cos}\,\varphi + j_0\, {}^{0}\mathrm{Sin}\,\varphi$$

zu keinem bestimmten Resultate führt, indem für jedes endliche φ

$${}^{0}\mathrm{Sin}\,\varphi = \infty,$$
$${}^{0}\mathrm{Cos}\,\varphi = -\infty.$$

Betrachten wir jedoch

$${}^{0}\mathrm{Cos}\,\varphi + j_0\, {}^{0}\mathrm{Sin}\,\varphi$$

als Grenzwerth von

$${}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\varphi + j_\lambda\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

so finden wir j_φ folgendermassen

$$\begin{aligned} j_\varphi &= {}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\varphi + j_\lambda\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi \\ &= {}^{\lambda}\mathrm{Sin}(\lambda-\varphi) + j_\lambda\, {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi \\ &= \frac{\sin(\lambda-\varphi)}{\sin\lambda} + j_\lambda \frac{\sin\varphi}{\sin\lambda} \\ &= \frac{\sin(\lambda-\varphi) + (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}} \sin\varphi}{\sin\lambda}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $\lambda = \text{Null}$, so wird die rechte Seite zu Null durch Null. Mit Anwendung der Differentialrechnung finden wir

$$j_\varphi = \frac{\cos(\lambda-\varphi) + \pi^{-1}\sin\varphi\,(-1)^{\frac{\lambda}{\pi}}\, l(-1)}{\cos\lambda}$$

für $\lambda = 0$. Diess giebt

$$j_\varphi = \cos\varphi + \sin\varphi \,.\, \frac{1}{\pi}\, l(-1).$$

Und da $l(-1) = \pi i$, so erhalten wir ganz richtig

$$j_\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Es ist also in der That

$$j_\varphi = {}^0\mathrm{Cos}\,\varphi + j_0\,{}^0\mathrm{Sin}\,\varphi,$$

mithin z. B. auch die eigenthümliche Gleichung

$$i = {}^0\mathrm{Cos}\,{}^1/_2\pi + j_0\,{}^0\mathrm{Sin}\,{}^1/_2\pi.$$

13. — Die vorstehenden Betrachtungen geben zugleich Aufschluss über die geometrische Bedeutung der allgemeinen complexen Ausdrücke von der Form

$$u = a + j\,b.$$

Es ist die rechte Seite dieser Gleichung die Summe zweier Strecken a und b, von denen letztere unter dem Winkel λ von der Richtung der Strecke a abweicht. Daher ist u die dritte Seite in einem Dreiecke, dessen zwei andere Seiten a und b den inneren Winkel $\pi - \lambda$ bilden.

Dieselbe Gleichung kann aber auch betrachtet werden als Ausdruck für die Diagonale u eines Parallelogrammes, dessen Seiten a und b den Winkel λ bilden. Der reducirte Ausdruck

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,\cos\lambda}\;({}^\lambda\mathrm{Cos}\,\varphi + j_\lambda\,{}^\lambda\mathrm{Sin}\,\varphi)$$

giebt dieselbe Strecke u, zeigt aber auf der rechten Seite die Länge dieser Strecke und zugleich den Winkel φ unter dem dieselbe gegen a geneigt ist.

Diese Erklärung der complexen Ausdrücke giebt auch Aufschluss darüber, dass wenn

$$a + j\,b = c + j\,d,$$

nothwendig

$$a = c$$

und

$$b = d$$

sein muss, weil sonst die durch jene complexen Ausdrücke dargestellten Strecken nicht gleiche Grösse und gleiche Neigung gegen a resp. c hätten.

§. 13. Die longimetrischen Functionen als besonderer Fall der allgemeinen Winkelfunctionen.

Von den Winkelfunctionen sind, soviel dem Verfasser bekannt, bis jetzt nur die gemeinen goniometrischen Functionen, d. h. Winkelfunctionen mit der Basis $\lambda = {}^1/_2\pi$ näher untersucht worden. Die für dieselben giltigen Ausdrücke ergeben sich aus den von uns abgeleiteten Formeln, indem man darin $\lambda = \frac{\pi}{2}$ setzt. Wir stellen dieselben hier nicht auf, da sie in jedem Lehrbuch der Goniometrie zu finden sind. Einer ganz besonderen Beachtung sind aber daneben noch werth die Functionen, welche sich ergeben, wenn man $\lambda = 0$ oder $= \pi$ setzt.

Wird der Basis-Winkel λ zu Null, so haben die Functionen eines endlichen Winkels β keine rechte Bedeutung mehr, weil dann Sin β und

Cos β unendlich gross werden. Wol aber ergeben sich jetzt beachtenswerthe Resultate, wenn β und λ sich beide der Null nähern. Für unendlich kleine Winkel β und λ reducirt sich die Figur (5) auf die Strecke a b, welche durch den Punkt c innerlich oder äusserlich getheilt wird; und zwar sieht man, dass für $\beta < \lambda$ der Punkt c zwischen a und b liegt. Dass für $\beta > \lambda$ der Punkt c ausserhalb der Strecke a b auf der Seite von b, dass endlich für negative Winkel β der Punkt c ausserhalb a b, aber auf der Seite von a liegt. (Siehe Figur 6, 7 und 8.)

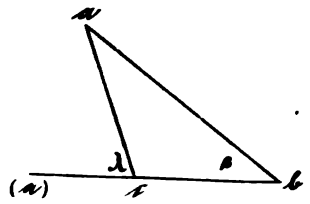

Fig. 5.

Fig. 6.

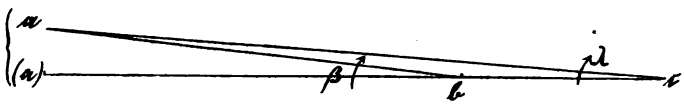

Fig. 7.

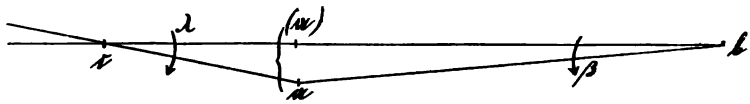

Fig. 8.

Die Strecke a c ist jetzt eine Art (relatives) Mass für den unendlich kleinen Winkel β im Vergleich zu dem ebenfalls zu Null werdenden Winkel λ, für welchen a b als Mass gilt, indem $\frac{\sin\beta}{\sin\lambda} = \left(\frac{\beta}{\lambda}\right) = \frac{a\,c}{a\,b}$ ist.

Da aber von diesen Nullwinkeln nur noch die zusammenfallenden Schenkel sichtbar sind, so kann man ganz von den Winkeln absehen, indem man nur die Strecken a c, c b und a b in's Auge fasst, und nun die Quotienten

$$\frac{a\,c}{a\,b}, \quad \frac{c\,b}{a\,b}, \quad \frac{a\,c}{c\,b}$$

bezüglich Sinus, Cosinus und Tangente der Strecke a c oder des Punktes c in Bezug auf a b nennt. Damit sind wir aber bei den im folgenden Abschnitt ausführlich für sich zu untersuchenden longimetrischen Functionen angelangt.

Wird dagegen der Basiswinkel λ zu π, statt zu Null, (Fig. 9, 10 und 11), so wird dadurch an dem Wesen der longimetrischen Functionen eine ähnliche Aenderung herbeigeführt, wie wenn man bei allgemeinen

Winkelfunctionen $\pi - \lambda$ statt λ als Basiswinkel annimmt. Es vertauschen hierbei, für endliche Winkel β, diese Winkel ihre Functionen mit denen

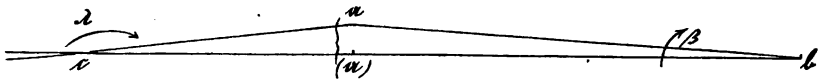

Fig. 9.

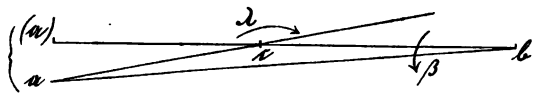

Fig. 10.

Fig. 11.

der Nebenwinkel. Für $\beta = 0$ und $\lambda = \pi$ ergeben nämlich die positiven β Punkte c (siehe Fig. 9) auf der Seite von a ausserhalb a b, während negative β (Fig. 10 und 11) nur zu Punkten c führen innerhalb a b und ausserhalb nach der Seite b zu. Etwas wesentlich Neues wird dadurch aber nicht für die longimetrischen Functionen herbeigeführt.

Zweiter Abschnitt.

Von den longimetrischen Functionen.

Da die longimetrischen Functionen, ein besonderer Fall der allgemeinen goniometrischen Functionen, eine eigenthümliche Wichtigkeit haben, so werden wir die Betrachtungen dieses Kapitals so durchführen, dass dieselben auch verständlich sind, ohne dass man vorher die allgemeinen Lehren des ersten Abschnittes durchzugehen hätte.

§. 14. Definition der longimetrischen Functionen.

1. — Theilt man eine Strecke $a\,b$ innerlich oder äusserlich durch einen Punkt c, so ist, mit Berücksichtigung des Vorzeichens, stets

$$a\,c + c\,b = a\,b.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung, wenn c auf der Verlängerung der Strecke $a\,b$ liegt, ergiebt sich daraus, dass dann die Strecken $a\,c$ und $c\,b$ entgegengesetzte Richtungen und somit verschiedene Vorzeichen haben.

Die sechs aus den Strecken

$$a\,c,\quad c\,b,\quad a\,b$$

gebildeten Quotienten

$$\frac{a\,c}{a\,b},\ \frac{c\,b}{a\,b},\ \frac{a\,c}{c\,b},$$
$$\frac{a\,b}{a\,c},\ \frac{a\,b}{c\,b},\ \frac{c\,b}{a\,c}$$

werden wir in Folgendem bezüglich

Sinus, Cosinus, Tangente,
Cosecante, Secante, Cotangente

der Strecke $a\,c$ in Bezug auf $a\,b$ nennen und dieselben durch

Sin $a\,c\,b$, Cos $a\,c\,b$, Tang $a\,c\,b$,
Cosec $a\,c\,b$, Sec $a\,c\,b$, Cotang $a\,c\,b$,

oder auch kürzer mit

Sin $a\,c$, Cos $a\,c$ etc.,

und wenn keine Undeutlichkeit daraus hervorgehen kann, meist kurz mit

Sin c, Cos c etc.

bezeichnen.

Unter dem Sinus einer Strecke wird man daher allgemein den Quotienten dieser Strecke durch eine andere als Basis dienende Strecke von paralleler Richtung verstehen. Die übrigen Functionen der Strecke sind dann leicht zu definiren.

Zusammen werden wir obige Quotienten longimetrische Functionen heissen. Einer Verwechselung dieser Functionen mit den goniometrischen kann man dadurch vorbeugen, dass man die Winkel immer mit griechischen Buchstaben bezeichnet, und bei den gemeinen goniometrischen Functionen die Abkürzungen sin, cos etc. mit kleinen Anfangsbuchstaben schreibt.

Die Unbestimmtheit, die den longimetrischen Functionen einer Strecke a c dadurch anhaftet, dass in Bezug auf die Länge der Strecke a b keine feste Bestimmung getroffen ist, könnte dadurch zum Verschwinden gebracht werden, dass man a b gleich der Längeneinheit setzte. Die goniometrischen Functionen sind übrigens, wie die früheren §§. lehren, auch vieldeutig; und die gemeinen goniometrischen Functionen eines Winkels erhalten ihre Bestimmtheit nur durch die Festsetzung einer Winkeleinheit, und zwar hier des rechten Winkels.

2. — Die longimetrischen Functionen sind Streckenquotienten, mithin unbenannte Zahlen, von denen, falls a b gleich der Längeneinheit ist, der

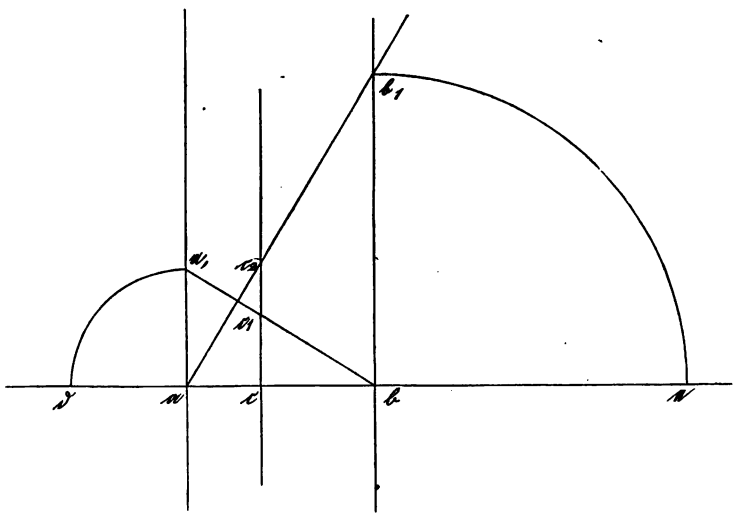

Fig. 12.

Sinus durch a c, der Cosinus durch c b nach Grösse und Richtung dargestellt werden. Auch die übrigen Functionen lassen in diesem Falle eine

einfache geometrische Darstellung zu. Errichtet man nämlich (Fig. 12 in a, b und c Senkrechte auf a b, macht sodann auf der Senkrechten in c die Stücke $c c_1 = a c$, und $c c_2 = c b$, zieht ferner $a c_2$ bis zum Schnitt b_1 auf $b b_1$ und $b c_1$ bis zum Durchschnitt a_1 auf $a a_1$, so ist Tang $c = a a_1$ Cot $c = b b_1$; endlich, wenn man noch $a b = a a_1$ und $b e = b b_1$ gemacht so ist Sec $c = b b$; Cosec $c = a e$.

Bei der Herleitung der goniometrischen Functionen eines Winkels ist es einerlei, von welchem Punkte des einen Schenkels man unter dem Basis-Winkel λ gegen den andern Schenkel zieht. Etwas Analoges ergiebt sich für die longimetrischen Functionen des Punktes c dadurch, dass man durch die drei durch a, b und c gezogenen Parallelen a, b, c eine Transversale m zieht. Die auf derselben zwischen den genannten Parallelen liegenden Strecken ergeben, in richtiger Weise durch Division mit einander verbunden, ebenfalls die oben definirten longimetrischen Functionen. Die mehrfach genannten Quotienten sind jetzt Verhältnisse der Streifen a b, a c, c b, wie denn longimetrische Functionen überall da in Anwendung kommen können, wo es sich um Verhältnisse der Stücke eines in zwei gleichartige Theile zerlegten Ganzen handelt, für welche die Gleichung

$$a c + c a = a b$$

allgemein Anwendung findet, z. B. auf Winkel und Kreisbogen ganz direct.

3. — Die Werthe sämmtlicher longimetrischer Functionen schwanken zwischen $-\infty$ und $+\infty$. Sie sind die Grenzwerthe für die allgemeinen goniometrischen Functionen. Denn während bei den gemeinen Winkel-Functionen die Sinusse und Cosinusse zwischen -1 und $+1$ enthalten waren, während die allgemeinen goniometrischen Sinusse und Cosinusse zwischen $-\operatorname{cosec}\lambda$ und $+\operatorname{cosec}\lambda$ sich bewegten, d. h. schon einen erweiterten Spielraum hatten, so giebt es für die longimetrischen Sinusse und Cosinusse keine Grenzen innerhalb der reellen Zahlreihe von $-\infty$ bis $+\infty$. Aehnlich ist es bei den andern Functionen.

Bezeichnen wir die drei Theile der unbegrenzten Geraden, welche durch a b bestimmt ist, mit den Namen Mittelstrecke, linker Strahl und rechter Strahl, so haben die Functionen der Punkte der Mittelstrecke alle positives Vorzeichen. Für die Punkte des linken Strahls sind nur die Cosinusse und Secanten positiv, für die des rechten Strahls nur die Sinusse und Cosecanten.

§. 15. Abhängigkeit der longimetrischen Functionen desselben Punktes von einander.

Der Zusammenhang unter den longimetrischen Functionen desselben Punktes oder derselben Strecke ergiebt sich leicht dadurch, dass man die Grundgleichung

$$a c + c b = a b$$

er Reihe nach durch die einzelnen Glieder derselben dividirt. Wir erhalen so

$$\begin{aligned} \text{Sin } c + \text{Cos } c &= 1, \\ 1 + \text{Tang } c &= \text{Sec } c, \\ 1 + \text{Cot } c &= \text{Cosec } c. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen, in Verbindung mit

$$\begin{aligned} \text{Sin } c \,.\, \text{Cosec } c &= 1, \\ \text{Cos } c \,.\, \text{Sec } c &= 1, \\ \text{Tang } c \,.\, \text{Cot } c &= 1, \end{aligned}$$

estatten es, jede longimetrische Function durch jede andere auszudrücken. So ist z. B.

$$\begin{aligned} \text{Cos } c &= 1 - \text{Sin } c, \\ \text{Sin } c &= \frac{\text{Tg } c}{1 + \text{Tg } c}. \end{aligned}$$

§. 16. Die longimetrischen Functionen eines Aggregates.

1. — Wenn wir $a c \pm a b$ kurz mit $c \pm b$ bezeichnen, so gelten für olche Binome folgende Sätze. Es ist

$$\begin{aligned}
&(1)\ \text{Sin } (c - b) = \text{Sin } c \,.\, \text{Cos } b - \text{Cos } c \,.\, \text{Sin } b, \\
&(2)\ \text{Cos } (c + b) = \text{Cos } c \,.\, \text{Cos } b - \text{Sin } c \,.\, \text{Sin } b, \\
&(3)\ \text{Sin } (c + b) = \text{Sin } c \,.\, \text{Cos } (-b) + \text{Cos } c \,.\, \text{Sin } b \\
&\qquad\qquad = \text{Sin } c \,.\, \text{Cos } b + \text{Cos } (-c) \,.\, \text{Sin } b \\
&\qquad\qquad = \text{Sin } c \,.\, \text{Cos } b + \text{Cos } c \,.\, \text{Sin } b + 2\,\text{Sin } c \,.\, \text{Sin } b, \\
&(4)\ \text{Cos } (c - b) = \text{Cos } c \,.\, \text{Cos } (-b) + \text{Sin } c \,.\, \text{Sin } b \\
&\qquad\qquad = \text{Cos } c \,.\, \text{Cos } (-b) - \text{Sin } c \,\text{Sin } (-b) \\
&\qquad\qquad = \text{Cos } c \,.\, \text{Cos } b + \text{Sin } c \,.\, \text{Sin } b + 2\,\text{Cos } c \,.\, \text{Sin } b, \\
&(5)\ \text{Tang } (c - b) = (\text{Tg } c - \text{Tg } b) : (1 + \text{Tg } c \,.\, \text{Tg } b + 2\,\text{Tg } b), \\
&(6)\ \text{Tang } (c + b) = (\text{Tg } c + \text{Tg } b + 2\,\text{Tg } c \,.\, \text{Tg } b) : (1 - \text{Tg } c \,.\, \text{Tg } b), \\
&(7)\ \text{Sec } (c - b) = 1 + \text{Tg } (c - b) = \frac{1 + \text{Tg } c + \text{Tg } b + \text{Tg } c \,.\, \text{Tg } b}{1 + \text{Tg } c \,.\, \text{Tg } b + 2\,\text{Tg } b}, \\
&(8)\ \text{Sec } (c + b) = 1 = \text{Tg } (c + b) = \frac{1 + \text{Tg } c + \text{Tg } b + \text{Tg } c \,.\, \text{Tg } b}{1 - \text{Tg } c \,.\, \text{Tg } b}.
\end{aligned}$$

Die Herleitung der vorstehenden Formeln bietet keine Schwierigkeit. Für Sin $(c - b)$ z B. ist

$$\begin{aligned}
\text{Sin } (c - b) &= \frac{b c}{a b} = \frac{a c - a b}{a b} = \frac{a c}{a b} - \frac{a b}{a b} \\
&= \text{Sin } c - \text{Sin } b \\
&= \text{Sin } c - \text{Sin } c \,.\, \text{Sin } b + \text{Sin } c \,.\, \text{Sin } b - \text{Sin } b \\
&= \text{Sin } c \,(1 - \text{Sin } b) - \text{Sin } b \,(1 - \text{Sin } c) \\
&= \text{Sin } c \,.\, \text{Cos } b - \text{Cos } c \,.\, \text{Sin } b.
\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(\mathfrak{c}+\mathfrak{b}) &= 1-\operatorname{Sin}(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})\\ &= 1-\operatorname{Sin}\mathfrak{c}-\operatorname{Sin}\mathfrak{b}=\operatorname{Cos}\mathfrak{c}-\operatorname{Sin}\mathfrak{b}\\ &= \operatorname{Cos}\mathfrak{c}-\operatorname{Cos}\mathfrak{c}\operatorname{Sin}\mathfrak{b}+\operatorname{Cos}\mathfrak{c}\operatorname{Sin}\mathfrak{b}-\operatorname{Sin}\mathfrak{b}\\ &= \operatorname{Cos}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}\mathfrak{b}-\operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Sin}\mathfrak{b}.\end{aligned}$$

Sodann haben wir

$$\begin{aligned}\operatorname{Sin}(\mathfrak{c}+\mathfrak{b}) &= \operatorname{Sin}\mathfrak{c}+\operatorname{Sin}\mathfrak{b}\\ &= \operatorname{Sin}\mathfrak{c}(1-\operatorname{Sin}\mathfrak{b})+\operatorname{Sin}\mathfrak{b}(1+\operatorname{Sin}\mathfrak{c})\\ &= \operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}\mathfrak{b}+\operatorname{Sin}\mathfrak{b}\,.\operatorname{Cos}(-\mathfrak{c})\end{aligned}$$

oder, da $1+\operatorname{Sin}\mathfrak{c}=\operatorname{Cos}(-\mathfrak{c})=\operatorname{Cos}\mathfrak{c}+2\operatorname{Sin}\mathfrak{c}$,

$$\operatorname{Sin}(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})=\operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}\mathfrak{b}+\operatorname{Cos}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Sin}\mathfrak{b}+2\operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Sin}\mathfrak{b}.$$

Endlich ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(\mathfrak{c}-\mathfrak{b}) &= 1-\operatorname{Sin}(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})\\ &= 1-\operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}\mathfrak{b}+\operatorname{Cos}\mathfrak{c}\operatorname{Sin}\mathfrak{b}\\ &= \operatorname{Sin}\mathfrak{c}+\operatorname{Cos}\mathfrak{c}-\operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}\mathfrak{b}+\operatorname{Cos}\mathfrak{c}\operatorname{Sin}\mathfrak{b}\\ &= \operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Sin}\mathfrak{b}+\operatorname{Cos}\mathfrak{c}(1+\operatorname{Sin}\mathfrak{b})\\ &= \operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Sin}\mathfrak{b}+\operatorname{Cos}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}(-\mathfrak{b})\\ &= \operatorname{Cos}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}\mathfrak{b}+\operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Sin}\mathfrak{b}+2\operatorname{Cos}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Sin}\mathfrak{b}.\end{aligned}$$

2. — Aus den Formeln für die longimetrischen Functionen von Summen und Unterschieden ergeben sich noch folgende Beziehungen.

(1) $\operatorname{Sin}2\mathfrak{c}=2\operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}\mathfrak{c}+2\operatorname{Sin}\mathfrak{c}^2=2\operatorname{Sin}\mathfrak{c}$,

(2) $\operatorname{Cos}2\mathfrak{c}=\operatorname{Cos}\mathfrak{c}^2-\operatorname{Sin}\mathfrak{c}^2$,

(3) $\operatorname{Sin}\mathfrak{c}+\operatorname{Sin}\mathfrak{b}=\operatorname{Sin}(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})=2\operatorname{Sin}{}^1\!/_2(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})$,

(4) $\operatorname{Cos}\mathfrak{c}+\operatorname{Cos}\mathfrak{b}=2\operatorname{Cos}{}^1\!/_2(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})$,

(5) $\operatorname{Cos}\mathfrak{c}-\operatorname{Cos}\mathfrak{b}=-2\operatorname{Sin}{}^1\!/_2(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})$,

(6) $1+\operatorname{Cos}\mathfrak{c}=2\operatorname{Cos}{}^1\!/_2\mathfrak{c}$,

(7) $1-\operatorname{Cos}\mathfrak{c}=2\operatorname{Sin}{}^1\!/_2\mathfrak{c}$.

Alle diese Formeln, deren Ableitung keine Schwierigkeit darbietet und die oft nur ein anderer Ausdruck für einfache Streckenbeziehungen sind, ergeben sich leicht aus den allgemeinen goniometrischen Formeln, indem man dort λ gleich Null annimmt und zugleich in den Formeln, worin gewöhnliche goniometrische Functionen vorkommen, den Amplituden derselben den Werth 0 giebt. So wird z. B.

$$\operatorname{Cos}\varphi+\operatorname{Cos}\psi=2\operatorname{Cos}{}^1\!/_2(\varphi+\psi)\,.\cos{}^1\!/_2(\varphi-\psi)$$

zu

$$\operatorname{Cos}\mathfrak{c}+\operatorname{Cos}\mathfrak{b}=2\operatorname{Cos}{}^1\!/_2(\mathfrak{c}+\mathfrak{b}),$$

indem $\cos{}^1\!/_2(\varphi-\psi)=\cos 0=1$ gesetzt wird.

Beispielsweise führen wir auch an, dass die bekannte Streckenbeziehung

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{c}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}\mathfrak{b}=0$$

nur ein anderer Ausdruck des Satzes

$$\operatorname{Sin}(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})=\operatorname{Sin}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Cos}\mathfrak{b}-\operatorname{Cos}\mathfrak{c}\,.\operatorname{Sin}\mathfrak{b}$$

ist.

Obige Streckengleichung lässt sich nämlich auch so schreiben

$$a\,b\,.\,c\,b = c\,b\,.\,a\,b + a\,c\,.\,b\,b.$$

Durch Division mit $a\,b^2$ erhält man hieraus

$$\frac{c\,b}{a\,b} = \frac{c\,b}{a\,b}\cdot\frac{a\,b}{a\,b} - \frac{a\,c}{a\,b}\cdot\frac{b\,b}{a\,b},$$

oder

$$\frac{b\,c}{a\,b} = \frac{a\,c}{a\,b}\cdot\frac{b\,b}{a\,b} - \frac{c\,b}{a\,b}\cdot\frac{a\,b}{a\,b},$$

und letztere Gleichung ist identisch mit

$$\mathrm{Sin}\,(c - b) = \mathrm{Sin}\,c\,.\,\mathrm{Cos}\,b - \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Sin}\,b,$$

so dass wir also auch umgekehrt diese Formel zur Herleitung der obigen Gleichung benutzen könnten.

§. 17. Beziehung der longimetrischen zu den gemeinen goniometrischen Functionen.

1. — Eine eigenthümliche Beziehung zwischen den gemeinen goniometrischen Functionen und den longimetrischen ergiebt sich durch folgende Betrachtung.

Der longimetrischen Relation

$$\mathrm{Sin}\,c + \mathrm{Cos}\,c = 1$$

entspricht bei den gemeinen goniometrischen Functionen die Gleichung

$$\sin\gamma^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Setzen wir nun $\sin\gamma^2 = \mathrm{Sin}\,c$, so wird auch $\cos\gamma^2 = \mathrm{Cos}\,c$, $\mathrm{tg}\,\gamma^2 = \mathrm{Tg}\,c$ etc.

Den Winkel γ kann man aber, so lange c zwischen a und b ist, leicht construiren. Beschreibt man nämlich (Fig. 13) über a b als Durchmesser einen Kreis, errichtet in c das Loth bis zur Peripherie des Kreises, so ist γ gleich dem Winkel a b c' oder auch $=$ a c' c. Denn es ist

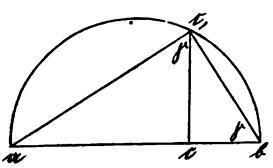

Fig. 13.

$$\mathrm{Sin}\,c = \frac{a\,c}{a\,b} = \frac{a\,c}{a\,c'}\cdot\frac{a\,c'}{a\,b} = \sin\gamma^2.$$

Durch diese Gleichung ist eine Beziehung zwischen jedem an dem Punkt b gelegenen Winkel γ und einem zwischen a und b gelegenen Punkte c gegeben. Nicht aber ergiebt jeder Theilpunkt der Strecke a b einen reellen Winkel. Zu den ausserhalb der Strecke a b gelegenen Punkten der Geraden a b gehören nämlich theilweise negative longimetrische Functionen, und da diese gleich den Quadraten der entsprechenden Winkelfunctionen sind, so müssen die Winkel dieser letzteren imaginär sein.

2. — Wir wollen an einer Aufgabe zeigen, wie imaginäre Lösungen in Bezug auf Winkel eine reelle Bedeutung erlangen können durch Einführung longimetrischer Functionen. Der Aufgabe der Theilung einer Strecke nach dem goldnen Schnitte kann man folgende Theilung des rechten Winkels gegenüber stellen. Es soll der rechte Winkel so zerlegt werden, dass der Sinus des einen Stückes das geometrische Mittel zwischen dem Sinus des ganzen Winkels und dem Sinus des anderen Stückes ist. Es ist dann

$$\sin\frac{\pi}{2} : \sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) : \sin\xi,$$

oder

$$1 : \cos\xi = \cos\xi : \sin\xi,$$

mithin

$$\cos\xi^2 = \sin\xi,$$

und hieraus

$$\cos\xi^4 + \cos\xi^2 - 1 = 0,$$

also

$$\cos\xi^2 = {}^1/_2(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Von diesen Lösungen ist nur die eine reell; die andere ergiebt imaginäre ξ. Setzt man aber $\cos\xi^2 = \mathrm{Cos}\,\mathfrak{x}$, so ist $\mathrm{Cos}\,\mathfrak{x} = {}^1/_2(-1 \pm \sqrt{5})$. Diese Lösung stellt zwei Punkte dar in der Entfernung

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

von $\mathfrak{b}$ aus, und zwar sind dies die Punkte, welche die für longimetrische Functionen gestellte Aufgabe lösen, einen Punkt $\mathfrak{x}$ zu finden, für welchen

$$\mathrm{Sin}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} : \mathrm{Sin}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{b} = \mathrm{Sin}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{b} : \mathrm{Sin}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}$$

oder

$$1 : \mathrm{Cos}\,\mathfrak{x} = \mathrm{Cos}\,\mathfrak{x} : \mathrm{Sin}\,\mathfrak{x}.$$

§. 18. Longimetrische Functionen mit beliebiger Basis.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir als Basis der longimetrischen Functionen die Längeneinheit angenommen. Wie man nun bei den goniometrischen Functionen vom rechten Winkel als Basis zu einem schiefen übergehen konnte, so kann man auch bei longimetrischen Functionen eine Länge $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1 = \lambda$ als Basis gegenüber von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = 1$ einführen und nun nach den Functionen des Punktes $\mathfrak{c}$ fragen. Es ist jetzt

$${}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} : \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = \frac{\sin\mathfrak{c}}{\sin\mathfrak{b}_1} = \frac{\sin\mathfrak{c}}{\sin\lambda},$$

wenn wir auch hier einmal vorübergehend die Functionen mit der Basis 1 mit kleinem Anfangsbuchstabe schreiben. Ferner ist dann

$${}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1} = \frac{\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = \frac{\sin(\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{c})}{\sin\lambda} = \frac{\sin(\lambda - \mathfrak{c})}{\sin\lambda}.$$

Sodann ist

$$^{\lambda}\mathrm{Tang}\ c = \frac{\sin c}{\sin(\lambda - c)} = \frac{\mathrm{tg}\,\lambda \,.\, \mathrm{tg}\, c}{\mathrm{tg}\,\lambda - \mathrm{tg}\, c} \cdot \frac{1}{\sin \lambda}.$$

Ausserdem ist

$$^{\lambda}\mathrm{Cos}\ c = {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\ (\lambda - c),\ {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\ c = {}^{\lambda}\mathrm{Cos}\ (\lambda - c) \quad \text{etc.}$$

Die Formeln für Functionen von $c \pm b$ bleiben für die Basis λ dieselben wie für die Basis 1.

Dasselbe gilt von den übrigen von uns für die longimetrischen Functionen aufgestellten Ausdrücken.

Anwendung der longimetrischen Functionen in der analytischen Geometrie.

§. 19. Bestimmung der Lage eines Punktes mit Hilfe paralleler Axen.

1. — Als Coordinaten eines Punktes m kann man den axenparallelen Abstand u desselben von der Geraden $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ (Fig. 14) betrachten in Verbindung mit dem Verhältniss, in welchem der Fusspunkt der Strecke u den Abstand $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ theilt. Betrachtet man nämlich die Strecke $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}$ als die Einheit, so kann irgend eine longimetrische Function des Fusspunktes gleich v gesetzt als zweite Coordinate des Punktes m angesehen werden. Dann hat eine Gerade m, welche auf den durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gezogenen Parallelen, die wir die Axen nennen wollen, die Stücke a und b abschneidet, die Gleichung

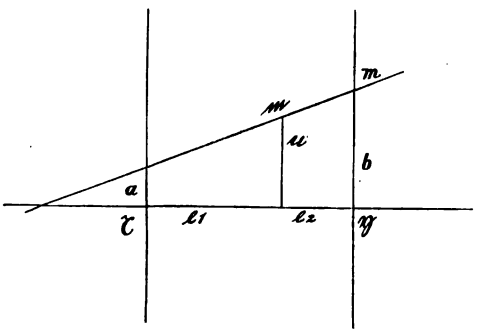

Fig. 14.

$$u = a\ \mathrm{Cos}\ m + b\ \mathrm{Sin}\ m,$$

wie sich leicht aus dem bekannten Satze für cartesische Ordinaten ergiebt, wonach

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

die Ordinate des Punktes ist, der den Abstand der Punkte $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$ im Verhältniss von $m_1 : m_2$ theilt.

Die Gleichung

$$u = a\ \mathrm{Cos}\ m + b\ \mathrm{Sin}\ m$$

lässt sich leicht umgestalten in

$$u = a + (b - a) \operatorname{Sin} m$$

oder

$$u = b + (a - b) \operatorname{Cos} m.$$

Dieses Coordinaten-System hat Aehnlichkeit mit den Polarcoordinaten, wobei ein Punkt durch einen Winkel und eine Strecke festgelegt wird, und man vermag mit seiner Hilfe ebene geometrische Gebilde zu untersuchen.

2. — Setzt man

$$u \operatorname{Cos} m = x,$$
$$u \operatorname{Sin} m = y$$

und trägt diese Strecken auf den durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gezogenen Axen ab, indem man sie die longimetrische Projectionen von u auf diese Axen nennt, so ist es möglich, mit den neuen Coordinaten x und y ebene geometrische Gebilde zu untersuchen; diese Coordinaten haben nur den Nachtheil, dass sie eine Curve, die in cartesischen Coordinaten vom Grade n ist, darstellen durch eine Gleichung vom Grade $2n$. So hat die Gleichung der Geraden, wie sich leicht durch Transformation aus

$$u = a \operatorname{Cos} m + b \operatorname{Sin} m$$

ergiebt, die Form

$$(x + y)^2 = ax + by,$$

und die des Kreises ist

$$(x + y)^4 = 4r^2 xy,$$

wenn $2r$ der Abstand der beiden Axen ist. Die Rückführung dieser Gleichungen auf solche vom ersten und zweiten Grad lässt sich dadurch bewirken, dass man

$$\frac{x}{(x+y)^2} = \xi, \quad \frac{y}{(x+y)^2} = \eta$$

setzt. Die Werthe ξ und η sind die reciproken Werthe der Abschnitte, die man auf den Axen erhält, wenn man von den Fundamentalpunkten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ aus durch den Punkt m zieht, und obige Gleichungen werden jetzt zu

$$a\xi + b\eta = 1$$

und

$$4r^2 \xi\eta = 1.$$

ξ und η lassen sich übrigens auch als die Cotangenten der Winkel auffassen, welche die von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ nach m gezogenen Strahlen mit der Mittellinie bilden.

§. 20. Parallele Gradencoordinaten.

1. — Zieht man durch zwei feste Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, deren Abstand e heisse, zwei parallele Geraden, die wir die Axen nennen wollen, während die durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmte Gerade den Namen der Grund- oder Mittel-

linie des Coordinatensystems führen möge (siehe Fig. 14), so ist jede Gerade m in der Ebene der Axen ihrer Lage nach bestimmt durch die auf den Axen bestimmten Schnittpunkte. Da diese Punkte selbst durch ihre Abstände von ξ und η fest gelegt sind, so werden wir diese mit x und y bezeichneten Strecken die Coordinaten der Geraden m nennen. Zugleich möge auf der Geraden $\xi\ \eta$ die Richtung von ξ nach η als die positive gelten und die Coordinaten selbst mit dem positiven oder negativen Zeichen in Rechnung gebracht werden, je nachdem sie Stücke auf der einen oder der anderen Seite von $\xi\ \eta$ angeben.

2. — Aus den Coordinaten x und y einer Geraden ist es leicht, die Lage des Schnittpunktes m_0 derselben mit der Mittellinie zu finden. Es ist nämlich

$$\operatorname{Tg} m_0 = -\frac{x}{y},$$

wobei m_0 als Theilpunkt der Strecke $\xi\ \eta$ gilt. Die goniometrische Tangente des Winkels τ dagegen, den die Gerade m mit der Grundlinie macht, ist, wenn die Axen senkrecht zur Mittellinie sind,

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{y - x}{e},$$

welcher Ausdruck sich auf $y - x$ reducirt, falls $e = 1$ ist.

3. — Ist eine Gerade parallel zu den Axen, so sind ihre Coordinaten beide unendlich gross. In diesem Falle wird die Lage der Geraden durch die Tangente ihres Schnittpunktes auf der Mittellinie bestimmt; dieselbe ist gleich dem Grenzwerthe von

$$-\frac{x}{y}.$$

4. — Durch zwei Geraden x_1, y_1 und x_2, y_2 ist ein Punkt bestimmt, dessen Gleichung wir später feststellen werden. Der Abstand dieses Schnittpunktes von der Mittellinie ist

$$\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - y_1 + y_2 - x_2}.$$

Die Tangente des Schnittpunktes in Bezug auf den Abstand der beiden Axen, oder die Tangente des Abstandes des Schnittpunktes von der x Axe, ist

$$-\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Die goniometrische Tangente des Winkels der beiden Geraden ist

$$\frac{(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)}{e^2 + (x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}\, e.$$

Zwei Geraden sind parallel, wenn

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1;$$

dieselben stehen senkrecht aufeinander, wenn

$$(x_2 - y_2)\,(x_1 - y_1) = -\,e^2.$$

Die Coordinaten einer Geraden, die durch den Schnittpunkt von $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ geht und welche die Axenstücke zwischen diesen Geraden *im* Verhältnisse von k_1 zu k_2 theilt, sind

$$x = \frac{k_1 x_2 + k_2 x_1}{k_1 + k_2}\;;\; y = \frac{k_1 y_2 + k_2 y_1}{k_1 + k_2}.$$

5. — Den Inhalt $\triangle$ des durch drei Geraden $x_1\,y_1$, $y_2\,y_2$, $x_3\,y_3$ bestimmten Dreiecks findet man, unter der Vorraussetzung, dass die Axen senkrecht zur Mittellinie sind, mittelst der Formeln

$$\pm 2\triangle = [(x_1 - x_2)\,\mathrm{Sin}\,\alpha_3 + (x_2 - x_3)\,\mathrm{Sin}\,\alpha_1 + (x_3 - x_1)\,\mathrm{Sin}\,\alpha_2]\,e,$$
$$\pm 2\triangle = [(y_1 - y_2)\,\mathrm{Cos}\,\alpha_3 + (y_2 - y_3)\,\mathrm{Cos}\,\alpha_1 + (y_3 - y_1)\,\mathrm{Cos}\,\alpha_2]\,e,$$

wobei das Zeichen + gilt, wenn die Geraden von links durch oben nach rechts aufeinander folgen und zugleich α_3 der Schnittpunkt zwischen $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ ist.

Diese Ausdrücke ergeben sich leicht als Aggregate der drei Dreiecke, welche je zwei Seiten mit einer der Axen bilden.

Da nun

$$\mathrm{Cot}\,\alpha_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2},$$

also

$$\mathrm{Sin}\,\alpha_3 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2 + y_2 - y_1},$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2 + y_2 - y_1},$$

so ist mithin auch

$$\pm 2\triangle = e\left[\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 - x_2 + y_2 - y_1} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{x_2 - x_3 + y_3 - y_2} + \frac{(x_3 - x_1)^2}{x_3 - x_1 + y_1 - y_3}\right]$$

oder

$$\pm 2\triangle = e\left[\frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 - y_2 + x_2 - x_1} + \frac{(y_2 - y_3)^2}{y_2 - y_3 + x_3 - x_2} + \frac{(y_3 - y_1)^2}{y_3 - y_1 + x_1 - x_3}\right]$$

Für den Inhalt P eines n-ecks ergiebt sich leicht

$$\pm 2\,P = \Sigma \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{x_k - x_{k+1} + y_{k+1} - y_k}\,e.$$

für $k = 1, 2, \ldots n$.

Diese Formeln könnten eine praktische Verwendung finden bei der Ermittelung des Inhalts gewisser unzugängiger Flächen.

Auch eine Formel für das Differential der Fläche einer krummlinig begrenzten ebenen Figur lässt sich hieraus ableiten.

Viele dieser Ausdrücke werden einfacher, wenn man als Coordinaten

einer Geraden x und z einführt, wobei $z = y - x$ ist. Dadurch wird z. B.

$$\pm 2 \triangle = e \left[\frac{(x_2 - x_1)^2}{z_2 - z_1} + \frac{(x_3 - x_2)^2}{z_3 - z_2} + \frac{(x_1 - x_3)^2}{z_1 - z_3} \right].$$

§. 21. Polarcoordinaten der Graden.

1. — Zieht man durch die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, wo die Gerade m die Axen trifft, Geraden nach beziehungsweise $\mathfrak{y}_0$ und $\mathfrak{x}_0$, so schneiden dieselben einander im Allgemeinen in einem Punkte m_1 (Fig. 15), durch dessen Angabe umgekehrt auch die Gerade m bestimmt ist. Legen wir nun diesen Punkt in Bezug auf unser Coordinatensystem dadurch fest, dass wir seinen Abstand u von $\mathfrak{x}_0$ $\mathfrak{y}_0$ angeben (diesen Abstand parallel zu den Axen genommen) und ferner das Verhältniss, in welchem m_1 den Abstand der Axen theilt, so ist es leicht, mit Hilfe von u und einer longimetrischen Function von m_1 die Werthe von x und y auszudrücken. Es ist nämlich allgemein, wenn wir in Zukunft einfach m statt m_1 schreiben,

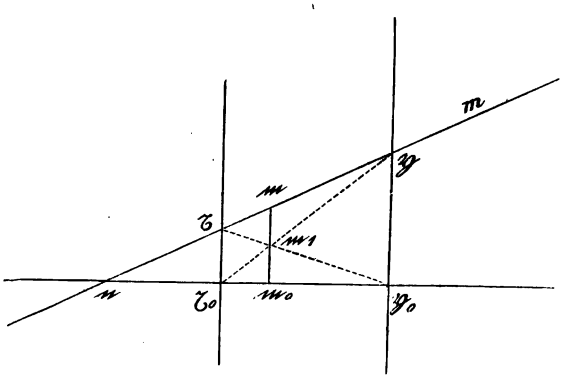

Fig. 15.

$$x = u \,.\, \mathrm{Sec}\, m,$$
$$y = u \,.\, \mathrm{Cosec}\, m.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{u} (\mathrm{Cos}\, m + \mathrm{Sin}\, m) = \frac{1}{u}.$$

Ueberdiess sieht man, dass u gleich der Hälfte der Strecke ist, die durch m parallel zu den Axen geht und von der Geraden m und der Mittellinie $\mathfrak{x}_0$ $\mathfrak{y}_0$ begrenzt wird, d. h. gleich der Hälfte des harmonischen Mittels aus x und y. Es ist nun ein Leichtes, eine in x und y gegebene Gleichung in eine solche mit u und m zu verwandeln. So ist z. B.

$$x\, y = \pm k^2$$

die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel, je nachdem man die rechte Seite mit positivem oder negativem Zeichen nimmt. Daraus ergiebt sich sofort

$$u^2\, \mathrm{Sec}\, m \,.\, \mathrm{Cosec}\, m = \pm k^2$$

oder

$$u^2 = \pm k^2\, \mathrm{Sin}\, m \,.\, \mathrm{Cos}\, m$$

als die Polargleichungen der genannten Kegelschnitte in Liniencoordinaten.

2. — Ein den Polarcoordinaten des Puuktes viel näher stehendes System von Geradencoordinaten erhält man, wenn man die in §. 20 erörterten Coordinaten x und y ersetzt durch

$$x = u \operatorname{Cos} m,$$
$$y = u \operatorname{Sin} m,$$

so dass also u und m bestimmt sind durch die Gleichungen

$$x + y = u,$$
$$\frac{y}{x} = \operatorname{Tg} m,$$

Beziehungen, die denen zwischen den Polarcoordinaten des Punktes und seinen rechtwinkeligen cartesischen Coordinaten sehr ähnlich sind.

Ist jetzt u und Tang m für eine Gerade m bekannt, so lässt sich deren Lage leicht finden. Man betrachtet Tang m als die longimetrische Tangente eines Punktes auf der Mittellinie; denkt man sich dort u parallel zu den Axen angetragen, so führt die longimetrische Projection desselben auf die Axen (im Sinne des §. 19, 2) zu den Coordinaten x und y der Geraden.

Die Polargleichung des Kreises ist jetzt

$$u^2 \operatorname{Cos} m \,.\, \operatorname{Sin} m = r^2,$$

wenn $e = 2r$ ist.

Jede Gleichung in Polarcoordinaten des Punktes bietet somit Stoff zur Untersuchung über die Bedeutung derselben Gleichung, die Variabeln als Geradencoordinaten in einer der oben gegebenen Bedeutungen betrachtet.

§. 22. Gleichung des Punktes.

1. — Zieht man durch einen Punkt m_0 der Mittellinie Geraden, so gilt für deren Abschnitte auf den Axen die Gleichung

$$\frac{x}{y} = -\operatorname{Tg} m_0$$

oder

$$y = -\operatorname{Cot} m_0 \,.\, x.$$

Steht dagegen ein Punkt m um p (parallel zu den Axen) von der Mittellinie ab, so ist für jede durch m gehende Gerade

$$y - p = -\operatorname{Cot} m \,.\, (x - p)$$

oder

$$x \operatorname{Cos} m + y \operatorname{Sin} m = p,$$

eine Gleichung, welche wir die Normalgleichung des Punktes nennen wollen und welche identisch ist in der Form mit der bekannten Normalgleichung der Geraden in cartesischen Coordinaten

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

Die Normalgleichung des Punktes lässt sich auch unmittelbar angeben mit Benutzung des Satzes in cartesischen Coordinaten, dass

$$y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}$$

die Ordinate eines Punktes ist, der den Abstand von $y_1\ y_2$ im Verhältniss von $m_1 : m_2$ theilt. Ausserdem führen die drei Trapeze, deren parallele Seiten bezüglich x und p, p und y, und x und y sind, auch sofort zu der verlangten Gleichung.

2. — Aus der Normalgleichung des Punktes m ergiebt sich leicht durch Division mit p

$$x \cdot \frac{\operatorname{Cos} m}{p} + y \cdot \frac{\operatorname{Sin} m}{p} = 1$$

oder

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

worin die Strecken b und a die Axenabschnitte sind, welche man erhält, wenn man von $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ aus durch den Punkt m Geraden an die y und x Axe zieht. Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich auch direct nachweisen durch Betrachtung der Flächenstücke von dem Inhalt b x, a y und a b.

3. — Giebt man der Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

die Gestalt

$$x v + y w = 1,$$

so lässt sich zeigen, dass für constantes x und y diess die Gleichung der Geraden x y in Punktcoordinaten ist, während v und w, die Coordinaten eines ihrer Punkte, die reciproken Werthe der Abschnitte auf den Axen sind, die man erhält, wenn man von $\mathfrak{y}_0$ und $\mathfrak{x}_0$ durch diesen Punkt der Geraden x y zieht. (Vergl. §. 19, 2.)

4. — Die Gleichung des Punktes giebt nach y aufgelöst

$$y = -\operatorname{Cot} m \cdot x + b,$$

also

$$y = kx + b.$$

Wollte man für k auch die Tangente eines Punktes einführen, wie bei rechtwinkeligen cartesischen Coordinaten dieses k die Tangente eines Winkels ist, so liesse sich dies durch den Punkt erreichen, der in Bezug auf die Punkte $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ symmetrisch zu dem harmonischen Punkte von m_0 liegt.

5. — Aus der allgemeinen Gleichung ersten Grades

$$Ax + By = C$$

erhält man die Normalgleichung durch Division mit A + B. Ist A + B

gleich Null, so liegt der Punkt im Unendlichen, und zwar auf der Mittellinie wenn $C = o$, andernfalls auf den einander parallelen Geraden, die mit der Mittellinie einen Winkel bilden, dessen trigonometrische Tangente $-C : e A$ ist.

§. 23. Bestimmung der Gleichung eines Punktes aus zwei Bedingungen.

Zur Festlegung eines Punktes in der Ebene der Axen sind zwei Bedingungen nöthig. Die Gleichung eines Punktes auf der Geraden $x_1\ y_1$ ist von der Form

1. $$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Die Gleichung des von diesem durch die Axen harmonisch getrennten Punktes der Geraden $x_1\ y_1$ ist

2. $$y - y_1 = -k(x - x_1).$$

Der zu dem ersten Punkte in Bezug auf die Axen symmetrisch gelegene Punkt der Geraden $x_1\ y_1$ hat die Gleichung

3. $$y - y_1 = \frac{1}{k}(x - x_1),$$

und der hierzu harmonische Punkt ist bestimmt durch

4. $$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1).$$

Die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden $x_1\ y_1$ und $x_2\ x_2$ ist

5. $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

so dass die Cotangente des Schnittpunktes in Bezug auf den Abstand der Axen

$$\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

ist. Diese Gleichung lässt sich auch geben in Form der Determinanten

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. — Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung einer Curve in Coordinaten der Geraden, so ist, wenn $x_1\ y_1$ die Coordinaten einer Berührenden dieser Curve sind,

$$\frac{dF}{dy_1} : \frac{dF}{dx_1}$$

die negative Tangente des Berührungspunktes in Bezug auf die Axen, daher

$$\left(\frac{dF}{dx_1}\right)(x - x_1) + \left(\frac{dF}{dy_1}\right)(y - y_1) = 0$$

die Gleichung des Berührungspunktes der Geraden $x_1\ y_1$, während

$$\left(\frac{dF}{dy_1}\right)(x - x_1) - \left(\frac{dF}{dy_1}\right)(y - y_1) = 0$$

die Gleichung des Punktes ist, welcher für unsere Betrachtungsweise das Analogon der Normale ist.

§. 24. Folgerungen aus der Gleichung des Punktes.

1. — Ist

$$x \operatorname{Cos} m + y \operatorname{Sin} m - p = 0$$

die Gleichung des Punktes m, und sind x_1 und y_1 die Coordinaten einer beliebigen Geraden, so ist die Gleichung des auf dieser Geraden und mit m auf einer zu den Axen parallelen liegenden Punktes

$$x \operatorname{Cos} m + y \operatorname{Sin} m - p_1 = 0,$$

wenn p_1 der Abstand des letztgenannten Punktes von der Mittellinie ist.

Letztere Gleichung gilt für x_1 und y_1, so dass

$$x_1 \operatorname{Cos} m + y_1 \operatorname{Sin} m - p_1 = 0$$

oder

$$x_1 \operatorname{Cos} m + y_1 \operatorname{Sin} m = p_1.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung auf beiden Seiten p, so ist

$$x_1 \operatorname{Cos} m + y_1 \operatorname{Sin} m - p = p_1 - p.$$

Die Differenz $p_1 - p$ ist aber die durch den Punkt m parallel zu den Axen an die Gerade $x_1\ y_1$ gezogene Strecke h. Setzt man also in die Gleichung eines Punktes in der Normalform die Coordinaten einer Geraden ein, so erhält man die von dem Punkte an die Gerade (parallel zu den Axen) gezogene Strecke. Hieraus erhellt auch die Bedeutung von

$$x \operatorname{Cos} m + y \operatorname{Sin} m - p = 0$$

als Gleichung des Punktes m. Für alle durch m gehende Geraden ist nämlich die Länge der von dem Punkte an dieselben gezogenen Strecke $= 0$.

Nennen wir die Strecke von einem Punkte an eine Gerade parallel mit den Axen den axenparallelen Abstand des Punktes von der Geraden, so ist allgemein dieser Abstand

$$h = \pm \frac{A x + B y - C}{A + B},$$

worin, bei negativem C, das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Richtung des Abstandes vom Punkt zur Geraden (parallel zu den Axen) die positive oder negative Richtung der Axen ist.

2. — Theilt ein Punkt m_3 den Abstand der Punkte m_1 und m_2 im Verhältnisse $k_1 : k_2$, so ist für jede durch m_3 gehende Gerade das Verhältniss der axenparallelen Abstände von m_1 und m_2

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{k_1}{k_2} = \mp \frac{x \operatorname{Cos} m_1 + y \operatorname{Sin} m_1 - p_1}{x \operatorname{Cos} m_2 + y \operatorname{Sin} m_2 - p_2}$$

je nachdem m_3 zwischen m_1 und m_2 liegt oder nicht. Es gilt also für diesen Punkt die Gleichung

$$k_2 (x \operatorname{Cos} m_1 + y \operatorname{Sin} m_1 - p_1) \pm k_1 (x \operatorname{Cos} m_2 + y \operatorname{Sin} m_2 - p_2) = 0$$

oder, wenn wir die erste Gleichung mit $u_1 = 0$, die zweite mit $u_2 = 0$ bezeichnen,

$$\frac{u_1}{k_1} \pm \frac{u_2}{k_2} = 0.$$

Es ist daher $u_1 \pm u_2 = 0$ die Gleichung des Halbirungspunktes des Abstandes der Punkte u_1 und u_2, beziehungsweise des unendlich entfernten Punktes auf der Geraden, die durch $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ geht.

Es ist ferner

$$\frac{u_1}{u'_1} + \frac{u_2}{u'_2} = 0$$

die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden $u_1\ u_2$ und der Geraden $x_1\ y_1$, wenn u'_1 und u'_2 die Werthe sind, welche $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ annehmen, wenn x_1 und y_1 in sie eingesetzt werden.

Da die Gleichung eines jeden Punktes in der Geraden $u_1\ u_2$ von der Form

$$u_3 = u_1 + k\, u_2 = 0$$

ist, so werden drei Punkte überhaupt in einer Geraden liegen, wenn ihre Gleichungen mit gewissen Coefficienten multiplicirt zur Summe Null identisch ergeben, d. h., wenn

$$A\, u_1 + B\, u_2 + C\, u_3 = 0.$$

Ist

$$u_3 = k_1\, u_1 + k_2\, u_2 = 0$$

die Gleichung eines Punktes, so ist die Normalform dieser Gleichung

$$\frac{k_1 u_1 + k_2 u_2}{k_1 + k_2} = 0,$$

vorausgesetzt, dass $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ Gleichungen in der Normalform sind.

§. 25. Die Gleichungen der wichtigsten Punkte eines Dreiecks.

Sind a, b, c, a, b, c, α, β, γ beziehungsweise die Ecken, Seiten, Winkel eines Dreiecks, und bezeichnen wir die Gleichungen der drei Eckpunkte in der Normalform mit

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,$$

so ergiebt jedes Aggregat der linken Seiten dieser Gleichungen die Gleichung eines Punktes in der Ebene des Dreiecks. Führt man dann noch Functionen der Bestimmungsstücke des Dreiecks als Coefficienten ein, so erhält man die Gleichungen der merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Wir zählen im Folgenden die einfachsten Fälle auf; es wäre leicht, eine grosse Zahl anderer Punkte auf diese Art zu ermitteln.

1. — Es sind

$$A \pm B = 0,$$
$$B \pm C = 0,$$
$$C \pm A = 0$$

die Gleichungen der Halbirungspunkte, beziehungsweise der unendlich entfernten Punkte der Seiten des Dreiecks.

2. — $A\,a \pm B\,b = 0,\quad B\,b \pm C\,c = 0,\quad C\,c \pm A\,a = 0,$ oder $A \sin\alpha \pm B \sin\beta = 0,\quad B \sin\beta \pm C \sin\gamma = 0,\quad C \sin\gamma \pm A \sin\alpha = 0$

sind die Gleichung der Schnittpunkte der Winkelhalbirenden an den Ecken mit den Gegenseiten

3. — $$\frac{A}{a} \pm \frac{B}{b} = 0;\quad \frac{B}{b} \pm \frac{C}{c} = 0;\quad \frac{C}{c} \pm \frac{A}{a} = 0;$$

oder

$$\frac{A}{\sin\alpha} \pm \frac{B}{\sin\beta} = 0;\quad \frac{B}{\sin\beta} \pm \frac{C}{\sin\gamma} = 0;\quad \frac{C}{\sin\gamma} \pm \frac{A}{\sin\alpha} = 0$$

sind die Gleichungen der in Bezug auf die Eckpunkte des Dreiecks zu den unter 2 genannten Punkten symmetrisch gelegenen Punkte.

4. — Verbindet man die Gleichung der drei Eckpunkte auf dieselbe Art mit dem Cosinus der Winkel, so gelangt man zu andern eigenthümlichen Punkten, die sich leicht construiren lassen mit Hilfe der in den Eckpunkten des Dreiecks auf den Seiten errichteten Lothe.

5. —
$$A \operatorname{tg}\alpha \pm B \operatorname{tg}\beta = 0,$$
$$B \operatorname{tg}\beta \pm C \operatorname{tg}\gamma = 0,$$
$$C \operatorname{tg}\gamma \pm A \operatorname{tg}\alpha = 0$$

sind die Gleichungen der Fusspunkte der Höhen und ihrer in Bezug auf die Ecken des Dreiecks harmonisch zugeordneten Punkte. Statt der einfachen Winkel könnte man in den vorstehenden Formeln Vielfache derselben einführen und würde dadurch zu neuen Punkten gelangen.

6. — $$A \pm B \pm C = 0$$

sind die Gleichungen des Schwerpunktes des Dreiecks und der dem Schwerpunkte in Bezug auf die Endpunkte der drei Mittellinien harmonisch zugeordneten Punkte.

7. — $$A\,a \pm B\,b \pm C\,c = 0$$

oder $$A \sin\alpha \pm B \sin\beta \pm C \sin\gamma = 0$$

sind die Gleichungen der Mittelpunkte der ein- und angeschriebenen Berührungskreise des Dreiecks.

8. — $$A \cos\alpha \pm B \cos\beta \pm C \cos\gamma = 0$$

sind die Gleichungen von Punkten, die sich mit Hilfe der in (4) angegebenen finden lassen.

9. — $A \operatorname{tg} \alpha \pm B \operatorname{tg} \beta \pm C \operatorname{tg} \gamma = 0$
sind die Gleichungen des Schnittpunktes der drei Höhen und der demselben in Bezug auf die Endpunkte der Höhen harmonisch zugeordneten Punkte.

10. — $A(b+c) \pm B(c+a) \pm C(a+b) = 0$
oder $A(\sin\beta + \sin\gamma) \pm B(\sin\gamma + \sin\alpha) \pm C(\sin\alpha + \sin\beta) = 0$
sind die Gleichungen der Mittelpunkte der Berührungskreise an dem Dreieck, dessen Ecken in den Halbirungspunkten der Seiten des ursprünglichen Dreiecks liegen.

11. — $A(-a+b+c) \pm B(a-b+c) \pm C(a+b-c) = 0$
sind die Gleichungen der Schnittpunkte der Transversalen durch die Ecken nach den Berührungspunkten der angeschriebenen Berührungskreise auf den Gegenseiten.

12. — $$\frac{A}{-a+b+c} \pm \frac{B}{a-b+c} \pm \frac{C}{a+b-c} = 0$$
sind die Gleichungen der Schnittpunkte der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises und nach den von diesen Punkten harmonisch durch die Ecken getrennten Punkten.

13. — $A \sin 2\alpha \pm B \sin 2\beta \pm C \sin 2\gamma = 0$
stellt den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und die diesem Mittelpunkte auf den Ecktransversalen zugeordneten harmonischen Punkte dar.

14. —
$A(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) \pm B(\sin 2\gamma + \sin 2\alpha) \pm C(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = 0$
enthält die Gleichung des Mittelpunktes des Kreises der durch die Halbirungspunkte der Seiten und durch die Fusspunkte der drei Höhen geht (Feuerbach'scher Kreis), und der auf den zugehörigen Ecktransversalen zugeordneten harmonischen Punkte.

Aus diesen Gleichungen ist es nicht schwer, Beziehungen über die Lage der Punkte zu einander abzuleiten. So liegen z. B. der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und der des Feuerbach'schen Kreises in einer Geraden, weil die Summe der den zwei letzteren zugehörigen Gleichungen die Gleichung des Schwerpunktes ergiebt. Auch ist leicht nachzuweisen, dass der Schwerpunkt den Abstand der genannten Mittelpunkte im Verhältniss von 1 : 2 theilt.

§. 26. Den Inhalt eines Dreiecks aus den Gleichungen seiner Eckpunkte zu bestimmen.

Um den Inhalt eines Dreiecks aus den Gleichungen seiner Eckpunkte zu ermitteln, benutzen wir die Formel für cartesische Coordinaten

$$2\triangle = \pm \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Ist nun

$$A\,x + B\,y = C$$

die Gleichung eines Punktes m, so ist in Bezug auf unser Axensystem

$$\operatorname{Cos} m = \frac{A}{A + B};$$

$$\operatorname{Sin} m = \frac{B}{A + B};$$

$$p = \frac{C}{A + B}.$$

Als cartesische Abscisse dieses Punktes können wir e Sin m betrachten, während p seine Ordinate ist.

Wir erhalten daher durch Einsetzen in obige Formel

$$2\triangle = \pm e \begin{vmatrix} \operatorname{Sin} a, & p_1, & 1 \\ \operatorname{Sin} b, & p_2, & 1 \\ \operatorname{Sin} c, & p_3, & 1 \end{vmatrix} = \mp e \begin{vmatrix} \operatorname{Sin} a, & \operatorname{Cos} a, & p_1 \\ \operatorname{Sin} b, & \operatorname{Cos} b, & p_2 \\ \operatorname{Sin} c, & \operatorname{Cos} c, & p_3 \end{vmatrix},$$

oder, wenn die Gleichungen der drei Ecken des Dreiecks von der Form $A\,x + B\,y = C$ sind

$$2\triangle = \pm \frac{e}{(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)(A_3 + B_3)} \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Axen senkrecht stehen auf der Mittellinie. Andernfalls ist der Ausdruck noch mit dem Sinus des Neigungswinkels der Axen zur Mittellinie zu multipliciren.

2. — Sind dagegen die drei Seiten des Dreiecks durch die Coordinaten

$$x_1\ y_1,\ x_2\ y_2,\ x_3\ y_3$$

bestimmt, so lauten die Gleichungen der Eckpunkte

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};\quad \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2};\quad \frac{y - y_3}{x - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}.$$

Nehmen wir hieraus die Werthe für A, B, C etc, so erhalten wir

$$2\triangle = \frac{+ e \cdot \begin{vmatrix} y_2 - y_1, & x_1 - x_2, & x_1\,y_2 - x_2\,y_1 \\ y_3 - y_2, & x_2 - x_3, & x_2\,y_3 - x_3\,y_2 \\ y_1 - y_3, & x_3 - x_1, & x_3\,y_1 - x_1\,y_3 \end{vmatrix}}{(x_1 - x_2 + y_2 - y_1)\,(x_2 - x_3 + y_3 - y_2)\,(x_3 - x_1 + y_1 - y_3)}.$$

Addirt man in dieser Determinante die beiden ersten Zeilen zur letzten, so wird dieselbe zu

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1, & x_1 - x_2 \\ y_3 - y_2, & x_2 - x_3 \end{vmatrix} \cdot (x_1\,y_2 - x_2\,y_1 + x_2\,y_3 - x_3\,y_2 + x_3\,y_1 - x_1\,y_3),$$

welcher Ausdruck gleich

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}^2$$

ist, sodass wir als Formel für den Inhalt des Dreiecks erhalten

$$2\Delta = \frac{\pm e \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} x_1 - y_1, & 1 \\ x_2 - y_2, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - y_2, & 1 \\ x_3 - y_3, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_3 - y_3, & 1 \\ x_1 - y_1, & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\mp e \begin{vmatrix} x_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}^2}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)},$$

wenn wir allgemein $y - x$ mit z bezeichnen.

Aus diesem Ausdrucke für den Inhalt des Dreieckes folgt u. A. sofort, dass eine Gerade xy, welche sich so bewegt, dass sie mit zwei andern stets ein Dreieck von demselben Inhalt einschliesst, eine Curve zweiter Classe umhüllt.

§. 27. Die Gleichung $x \sin(yz) + y \sin(zx) + z \sin(xy) = 0$.

Die Normalgleichung des Punktes

$$x \operatorname{Cos} \mathfrak{m} + y \operatorname{Sin} \mathfrak{m} = p$$

lässt sich auch schreiben in der Form

$$x(py) + y(xp) = p(xy),$$

worin die in Klammern stehenden Ausdrücke die Abstände der darin enthaltenen parallelen Strecken bedeuten. Dividirt man diese Gleichung durch e, so erhält man

$$x \operatorname{Sin}(py) + y \operatorname{Sin}(xp) = p \operatorname{Sin}(xy).$$

Ersetzt man hierin p durch z und beachtet, dass $\operatorname{Sin}(zy) = -\operatorname{Sin}(yz)$, so ist

$$(1) \quad x \operatorname{Sin}(yz) + y \operatorname{Sin}(zx) + z \operatorname{Sin}(xy) = 0.$$

Die Gleichung enthält drei parallele Strecken und drei Abstände auf der Mittellinie, welche letzteren durch die Bedingungsgleichung

$$(2) \quad (xy) + (yz) + (zx) = 0$$

verbunden sind.

Lässt man in (1) zwei der parallelen Strecken (und ihren Abstand) variabel, alles übrige aber (nach Grösse und Stelle) constant, immer mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung (2), so stellt die Gleichung den Punkt dar, der um die Länge der dritten parallelen Strecke von der Mittellinie absteht und den Abstand der beiden anderen in dem durch ihre

Coefficienten gegebenen umgekehrten Verhältniss theilt. Lässt man dagegen die vorher variabelen Stücke constant, die übrigen dagegen variabel sein, so stellt obige Gleichung die Gerade dar, welche auf den beiden festen Axen die gegebenen Längen abschneidet, während die dritte Parallele und das Verhältniss der Theilung des Axsenabstandes die Coordinaten der Punkte dieser Geraden bilden.

Aber nicht nur, dass diese Gleichung, je nachdem man zwei der Parallelen, oder eine der Parallelen und ihre Abstände variabel sein lässt, die Gleichung des Punktes oder der Geraden giebt in dem von uns hier betrachteten Coordinatensysteme, ganz dieselbe Gleichung liefert auch in cartesischen Coordinaten die Gleichung von Gerade und Punkt, wie wir jetzt nachweisen wollen.

2. — Unter Voraussetzung schiefwinkeliger Axen ist die Gleichung einer Geraden bekanntlich darstellbar in der Form

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = p,$$

worin p das Loth vom Coordinatenanfang auf die Gerade, α und β dagegen die Winkel bezeichnen, welche dieses Loth mit den Axen bildet. Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Sinus des Coordinatenwinkels ψ, so ist

$$x \sin \psi \cos \alpha + y \sin \psi \cos \beta = p \sin \psi.$$

Es ist aber $x \sin \psi$ das Loth von einem Punkte der Geraden auf die y-Axe, während $y \sin \psi$ das Loth auf die x-Axe ist. Bezeichnen wir ersteres mit y_1, letzteres mit x_1, so wird unsere Gleichung zu

$$x_1 \cos \beta + y_1 \cos \alpha = p \sin \psi.$$

Es ist ferner

$$\cos \beta = \sin (p\, y_1),$$
$$\cos \alpha = \sin (x_1\, p),$$
$$\sin \psi = \sin (x_1\, y_1).$$

Dadurch wird unsre Gleichung zu

$$x_1 \sin (p\, y_1) + y_1 \sin (x_1\, p) = p \sin (x_1\, y_1).$$

Ersetzen wir nun auch hier p durch z, lassen an x_1 und y_1 die Zeiger weg nnd berücksichtigen, dass $\sin (z\, y) = -\sin (y\, z)$, so wird unsere Gleichung zu

$$(3) \qquad x \sin (y\, z) + y \sin (z\, x) + z \sin (x\, y) = 0,$$

wobei ebenfalls $(x\, y) + (y\, z) + (z\, x) = 0$ als Bedingungsgleichung gilt.

Es ist übrigens die letzte Form (3.) der Gleichung der Geraden auch leicht direct aus der Figur (Fig. 16) ableitbar.

Lassen wir in der Gleichung (3.) eine der drei Strecken x, y, z und die Winkel, welche sie mit den beiden anderen macht, constant sein, so stellt dieselbe eine Gerade dar, die in dem Abstand der constanten Strecke vom Schnittpunkte der beiden anderen so gezogen ist, dass sie mit diesen beiden die Winkel macht, deren Sinusse als Coefficienten an den Coordi-

naten stehen. Es lassen sich dabei x, y und z als drei Lothe von einem beliebigen Punkt der Geraden auf die Axen x, y und z denken, wenn eine dieser Axen durch den Schnittpunkt der beiden anderen zu der gegebenen Gerade parallel gedacht wird. Dann ist unsere Gleichung ein besonderer Fall der Gleichung der Geraden in homogenen Coordinaten.

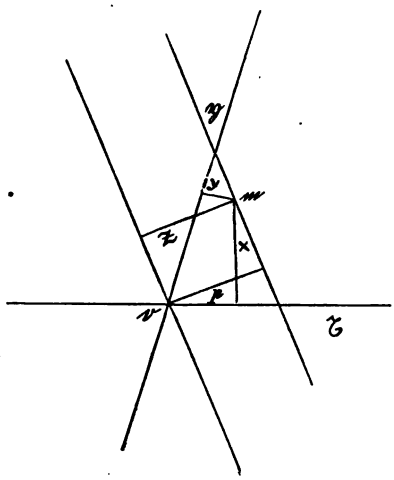

Fig. 16.

Lässt man dagegen in der Gleichung (3.) zwei Lothe und ihren Winkel constant sein, dagegen das dritte nebst seinen Winkeln mit den beiden Axen so variiren, dass obige Gleichung erfüllt bleibt, so stellt die Gleichung den Punkt dar, der um die beiden constanten Strecken von den Axen absteht.

§. 28. Transformation der Coordinaten.

1. — Um von den Coordinaten, die ihren Anfang in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ haben, überzugehen zu neuen, deren Anfang in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$, aber auf denselben Axen ist, mit anderen Worten, um von einer Mittellinie zu einer neuen überzugehen, ohne die Richtung und Stelle der Axen zu ändern, hat man zu setzen

$$x = x_1 + a,$$
$$y = y_1 + b,$$

wenn a und b die Coordinaten der neuen Mittellinie sind in Bezug auf das alte Coordinatensystem.

2. — Den Uebergang von den Axen x y zu Axen x_1 y_1, die parallel zu den alten liegen, während die Mittellinie ihre Lage nicht ändert, vermitteln die Gleichungen

$$x \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 = x_1 \cdot \mathfrak{x} \mathfrak{y}_1 + y_1 \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}$$
$$y \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 = x_1 \cdot \mathfrak{y} \mathfrak{y}_1 + y_1 \cdot \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}.$$

Diese Formeln lassen sich auch schreiben

$$x \operatorname{Sin} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 = x_1 \operatorname{Sin} \mathfrak{x} \mathfrak{y}_1 + y_1 \operatorname{Sin} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}$$
$$y \operatorname{Sin} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 = x_1 \operatorname{Sin} \mathfrak{y} \mathfrak{y}_1 + y_1 \operatorname{Sin} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}.$$

Sind $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{y}_1$ gleich der Einheit, so werden diese Formeln zu

$$x = x_1 \operatorname{Cos}(-\mathfrak{x}_1) - y_1 \operatorname{Sin} \mathfrak{x}_1 \text{ und } y = x_1 \operatorname{Sin} \mathfrak{x}_1 + y_1 \operatorname{Cos} \mathfrak{x}_1,$$

welche auch bei der Transformation rechtwinkeliger cartesischer Coordinaten Giltigkeit haben.

3. — Will man von den Axen x y übergehen zu Axen x_1 y_1, die zwar auch durch ξ und η gehen, aber in anderer Richtung als x y, d. h., will man die Fundamentalpunkte ξ und η beibehalten, aber die Richtung der Axen ändern, so sind die Formeln zu benutzen

$$x = \frac{e\, x_1 \sin \varphi_1}{(y_1 - x_1) \sin (\varphi - \varphi_1) + e \sin \varphi},$$

$$y = \frac{e\, y_1 \sin \varphi_1}{(y_1 - x_1) \sin (\varphi - \varphi_1) + e \sin \varphi},$$

worin φ und φ_1 die Winkel angeben, welche die alten, beziehungsweise die neuen Axen, mit der Mittellinie machen. Die Ausdrücke vereinfachen sich, wenn man $y - x = z$ einführt und ausserdem allgemeine goniometrische Functionen benutzt.

§. 29. Die Curven zweiter Classe.

1. — Die Gleichung

$$U = A\, x^2 + B\, x\, y + C\, y^2 + D\, x + E\, y + F = 0$$

stellt eine Curve dar, die von den Geraden umhüllt wird, deren Coordinaten diese Gleichung erfüllen.

Von jedem Punkte

$$M\, x + N\, y + P = 0$$

lassen sich zwei Berührende an die Curve ziehen, wie sich daraus ergiebt, dass man nachweist, dass dieser Punkt und obige Curve zwei Geraden gemeinschaftlich haben; die Curve ist also zweiter Classe. Wir können hier nicht weiter auf die Untersuchung dieser Curven eingehen und beschränken uns daher darauf, zu erwähnen, dass die Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel vorstellt, je nachdem von dem Punkte, dessen Gleichung

$$(2\, A + B)\, x + (B + 2\, C)\, y + D + E = 0$$

oder $$\left(\frac{d\, U}{d\, x}\right) + \left(\frac{d\, U}{d\, y}\right) = 0 \text{ ist,}$$

sich an die Curve keine, eine oder zwei Tangenten ziehen lassen. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Curve und liegt bei der Parabel in unendlicher Ferne, woraus sich noch für letztere Curve das besondere Kennzeichen

$$A + B + C = 0$$

ergiebt.

2. — Die Gleichung des Poles einer Geraden x_1 y_1, d. h. des Trägers der vierten harmonischen Strahlen zu den von den Punkten dieser Geraden an die Curve zweiter Classe gezogenen Berührenden und der Geraden selbst, lautet

$(2\,A\,x_1 + B\,y_1 + D)\,x + (B\,x_1 + 2\,C\,y_1 + E)\,y + D\,x_1 + E\,y_1 + 2\,F = 0.$

Die Herleitung dieser Gleichung kann so geschehen, dass man zuerst von einem Punkte der Mittellinie Tangenten an den Kegelschnitt $U = 0$ zieht, und den Ort der vierten harmonischen Strahlen zu den beiden Tangenten und der Mittellinie sucht. Man findet hierfür $D\,x + E\,y + 2\,F = 0$. Durch Transformation der Coordinaten lässt sich dann zeigen, dass die oben stehende allgemeinere Gleichung als der Ort der vierten harmonischen Strahlen für die von den Punkten der Geraden $x_1\,y_1$ an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten sich ergiebt.

Ist die Gerade $x_1\,y_1$ eine Berührende an U, so ist vorstehender Ausdruck die Gleichung ihres Berührungspunktes.

Nehmen wir diejenige Gerade, für welche $x_1 = y_1 = \infty$ ist, so ergiebt sich

$$(2\,A + B)\,x + (B + 2\,C)\,y + D + E = 0$$

als Gleichung des Poles der unendlich fernen Geraden, d. h. des Mittelpunktes der Curve.

3. — Das Vorstehende zeigt, wie auch bei der Untersuchung der Curven zweiter Classe bei Zugrundelegung unseres Coordinatensystemes vollständige Analogie sich zeigt mit den Untersuchungen der Curven zweiter Ordnung bei Zugrundelegung von cartesischen Punktcoordinaten, und wir wollen schliesslich nur noch erwähnen, dass die Vortheile, die sich bei Erörterung der Kegelschnitte aus der Zuziehung von Polarcoordinaten des Punktes ergeben, sich hier ebenfalls erzielen lassen, wenn man die in §. 21 angeführten Coordinaten anwendet. Dadurch erhält die Gleichung zweiten Grades entweder die Form

$$(A\,\mathrm{Sec}\,m^2 + B\,\mathrm{Sec}\,m\,\mathrm{Cosec}\,m + C\,\mathrm{Sec}\,m^2)\,u^2 + (D\,\mathrm{Sec}\,m + E\,\mathrm{Cosec}\,m)\,u + F = 0,$$

oder

$$(A\,\mathrm{Cos}\,m^2 + B\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Sin}\,m + C\,\mathrm{Sin}\,m^2)\,u^2 + (D\,\mathrm{Cos}\,m + E\,\mathrm{Sin}\,m)\,u + F = 0,$$

je nachdem man die erste oder die zweite Art von Polarcoordinaten benützt.

Diese Gleichungen lassen nun fast buchstäblich dieselben Betrachtungen zu, wie die, welche in Fiedler-Salmon's Geometrie der Kegelschnitte im VI. Capitel angestellt werden, und führen mit derselben Leichtigkeit zu Eigenschaften der Berührenden der Kegelschnitte, wie man dort zu solchen der Punkte dieser Curven gelangte.

4. — Mit Benutzung der im vorigen §. gegebenen Transformationsformeln gelingt es, aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades einfachere Gleichungen der Kegelschnitte abzuleiten. Man findet leicht, dass mit Anwendung der Formeln in (1.) sich die Glieder ersten Grades wegschaffen lassen, mit Ausnahme des Falles, dass

$$B^2 - 4\,A\,C = 0,$$

welcher hier einer Parabel entspricht, deren Hauptaxe den Coordinatenaxen parallel geht. Obige Transformation verlegt nämlich die Anfänge der Coordinaten nach dem Durchmesser, welcher der Richtung der Coordinatenaxen conjugirt ist.

Mit Hilfe der übrigen Transformationsformeln kann man auf Gleichungen gelangen, wie folgende

$$\frac{x_2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

von denen die erstere der Hyperbel, letztere einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel entspricht, je nachdem a^2 grösser, gleich oder kleiner als b^2 ist. Durch andere Bestimmung der Lage der Axen kann man die Gleichung

$$x\,y = \pm k^2$$

ableiten. Dieselbe ist, je nachdem die rechte Seite positiv oder negativ, die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel. Dabei liegen die Coordinatenanfänge in den Enden eines Durchmessers, während die Coordinatenaxen dem conjugirten Durchmesser parallel gehen. Die Gleichungen des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel endlich in ihrer einfachsten Form sind

$$x\,y = \pm r^2 = \pm \tfrac{1}{4} e^2.$$

5. — Wir fügen hier noch einige Formeln von allgemeinerer Wichtigkeit an. Die Axen sind dabei senkrecht zur Mittellinie angenommen.

Die Tangenten im Punkte m einer Curve und dem nächstfolgenden schliessen mit der x Axe ein Dreieck ein, das als das Differential der Fläche S angesehen werden kann, welche von zwei Tangenten in den Endpunkten des Bogens s, von diesem Bogen selbst und der x Axe begrenzt ist. Da dieses Dreieck zur Basis dx, zur Höhe den Abstand des Punktes m von der x Axe, d. h. $e \operatorname{Sin} m$ hat, so ist, wenn dS das Differential von S bezeichnet,

$$2\,dS = e \operatorname{Sin} m \,.\, dx$$
$$= \frac{e\,dx}{\operatorname{Cosec} m} = \frac{e\,dx}{1 + \operatorname{Cot} m} = \frac{e\,dx^2}{dx - dy}.$$

Es ist also

$$2S = \int \frac{e\,dx}{1 - f'(x)}.$$

Das Differential des Bogens s ergiebt als Projection auf die Mittellinie

$$ds \,.\, \cos \tau = d\,(e \operatorname{Sin} m),$$

mithin

$$ds = e \sec \tau\, d\, \frac{dx}{dx - dy}$$
$$= \sqrt{e^2 + (y - x)^2} \cdot \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx - dy)^2}.$$

Der Krümmungsradius ist

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Da nun

$$\tau = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - x}{e},$$

also

$$d\tau = \frac{dy - dx}{e^2 + (y - x)^2} \cdot e,$$

so erhalten wir für den Krümmungsradius

$$\varrho = \pm \frac{(e^2 + (y-x)^2)^{3/2}}{e} \cdot \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx - dy)^3}.$$

6. Um die Gleichungen einer Curve in Liniencoordinaten überzuführen in die Gleichung dieser Curve in Punktcoordinaten und umgekehrt, kann man folgendermassen verfahren. Es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung in Liniencoordinaten. Setzen wir nun voraus, dass das Punktcoordinatensystem seinen Anfang im Punkte $\mathfrak{x}$ der Mittellinie, dass letztere die Abscissenaxe, und dass es sich um rechtwinklige Coordinaten handle. Dann können wir in cartesischen Coordinaten u und v die Gleichung der Tangente im Punkte $\mathfrak{m}$ ausdrücken durch

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 1.$$

Es ist aber jetzt $b = x$, und $a = e \frac{x}{x - y}$.

Mithin ist die Gleichung der Tangente im Punkte $\mathfrak{m}$

$$\frac{u(x - y)}{ex} + \frac{v}{x} = 1,$$

oder

$$u(x - f(x)) + ev = ex.$$

Dieses ist die Gleichung einer Geraden, worin u und v die Coordinaten eines ihrer Punkte, x aber eine Variable ist, die durch ihre verschiedenen Werthe zu den verschiedenen Tangenten unserer Curve führt. Sucht man daher aus dieser Gleichung die Gleichung der von dieser Geraden eingehüllten Curve, so erhält man die Gleichung der Curve in Punktcoordinaten. Diese Rechnung wird bekanntlich dadurch ausgeführt, dass man die Gleichung

$$u(x - f(x)) + ev = ex$$

nach x differentiirt und aus der abgeleiteten und der ursprünglichen Gleichung x eliminirt.

Soll dagegen aus der Gleichung einer Curve

$$y = f(x)$$

n Punktcoordinaten die Gleichung in Liniencoordinaten u,v erhalten wer-en, so setzen wir

$$u \operatorname{Cos} m + v \operatorname{Sin} m = p$$

ls Gleichung eines Punktes der Curve $y = f(x)$ voraus. Indem wir dann ieder die Abscissenaxe mit der Mittellinie und den Coordinatenanfang nit dem Punkte ξ zusammen fallen lassen, ist

$$\operatorname{Sin} m = \frac{x}{e},$$

$$\operatorname{Cos} m = \frac{e - x}{e},$$

$$p = y,$$

mithin

$$u(e - x) + v x = e y,$$

oder es ist

$$u(e - x) + v x = e f(x)$$

die Gleichung eines Punktes der Curve deren Gleichung in Punktcoordinaten

$$y = f(x)$$

ist. Durch Betrachtungen, die denen der Theorie der Umhüllungen bei Punktcoordinaten ganz analog sind, lässt sich nun zeigen, dass, wenn man die Gleichung

$$u(e - x) + v x = e f(x)$$

nach x differentiirt und dann x aus dieser Abgeleiteten und der vorstehenden Gleichung eliminirt, man die Gleichung der vorgelegten Curve in den Liniencoordinaten u und v erhält.

§. 30. Trimetrische Coordinaten der Geraden.

1. — In den Anwendungen der Geradencoordinaten auf die Ermittelung der merkwürdigeren Punkte am Dreieck haben sich die Gleichungen dieser Punkte immer ergeben als Aggregate aus den Gleichungen der drei Eckpunkte des Dreiecks.

Man kann nun zeigen, dass die Gleichung eines jeden Punktes

$$u = A x + B y + C = 0$$

als Summe der mit gewissen Coefficienten multiplicirten Gleichungen dreier nicht in einer Gerade liegender Punkte $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ dargestellt werden kann. Setzen wir nämlich

$$u = k u_1 + l u_2 + m u_3,$$

so ergiebt sich durch Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten

$$k = \frac{(A \; B_2 \; C_3)}{(A_1 \; B_2 \; C_3)},$$

$$l = \frac{(A_1 \; B \; C_3)}{(A_1 \; B_2 \; C_3)},$$

$$m = \frac{(A_1 \; B_2 \; C)}{(A_1 \; B_2 \; C_3)},$$

wenn wir allgemein mit $(A_1\ B_2\ C_3)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

bezeichnen.

Nun sind aber u_1, u_2, u_3, wenn wir uns dieselben in der Normal*form* denken, die den Axen parallel genommenen Abstände der Punkte

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$$

von den Geraden x y, die durch den Punkt $u = 0$ gehen. Dadurch haben wir also eine Gleichung des Punktes erlangt in den Geradencoordinaten u_1, u_2, u_3, welche die den Axen (d. h. irgend einer Richtung) parallelen Abstände der Geraden von drei festen Punkten sind. Diese Fundamentalpunkte dürfen nicht in einer Geraden liegen, weil sonst der Nenner der Brüche, welche die Coefficienten von u_1, u_2 und u_3 sind, nach §. 26 zu Null wird.

Die Coordinaten u_1, u_2 und u_3 sind nicht von einander unabhängig, sondern durch die Gleichung

$$u_1 h_{23} + u_2 h_{31} + u_3 h_{12} = 2\triangle$$

mit einander verbunden, worin die h die Abstände der Axen nach Grösse und Richtung sind, $\triangle$ aber den Inhalt des von den Anfangspunkten der Coordinaten gebildeten Dreiecks vorstellt.

2. — Um Aufschluss über die geometrische Bedeutung der Coefficienten in der Gleichung

$$k u_1 + l u_2 + m u_3 = 0$$

zu erhalten, erinnern wir uns, dass nach §. 26

$$2\triangle_{123} = \frac{(A_1\ B_2\ C_3)}{(A_1 + B_1)\ (A_2 + B_2)\ (A_3 + B_3)}\ e$$

der Inhalt des von den drei Punkten

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$$

gebildeten Dreiecks ist, dass daher

$$2\triangle_{12} = \frac{(A_1\ B_2\ C)}{(A_1 + B_1)\ (A_2 + B_2)\ (A + B)}\ e,$$

$$2\triangle_{23} = \frac{(A\ B_2\ C_3)}{(A_2 + B_2)\ (A_3 + B_3)\ (A + B)}\ e,$$

$$2\triangle_{31} = \frac{(A_1\ B\ C_3)}{(A_3 + B_3)\ (A_1 + B_1)\ (A + B)}\ e,$$

wenn $\triangle_{12}$, $\triangle_{23}$, $\triangle_{31}$ sowohl nach Grösse als Vorzeichen die Dreiecke darstellen, die man erhält, wenn man den Punkt, dessen Gleichung $Ax + By + C = 0$ ist, mit den Eckpunkten 1 und 2, 2 und 3, 3 und 1 verbindet.

Denken wir uns aber $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ in der Normalform, so ist

$$A_1 + B_1 = 1,$$
$$A_2 + B_2 = 1,$$
$$A_3 + B_3 = 1;$$

es ist daher

$$m = \frac{(A\ B_1\ C_2)}{(A_1\ B_2\ C_3)} = \frac{\triangle_{1\,2}}{(A + B)\ \triangle_{1\,2\,3}},$$
$$k = \frac{(A\ B_2\ C_3)}{(A_1\ B_2\ C_3)} = \frac{\triangle_{2\,3}}{(A + B)\ \triangle_{1\,2\,3}},$$
$$l = \frac{(A_1\ B\ C_3)}{(A_1\ B_2\ C_3)} = \frac{\triangle_{3\,1}}{(A + B)\ \triangle_{1\,2\,3}}.$$

Dadurch wird unsre Gleichung zu

$$u_1 \triangle_{2\,3} + u_2 \triangle_{3\,1} + u_3 \triangle_{1\,2} = 0.$$

Drückt man die Inhalte dieser Theildreiecke durch ihre Höhen v_1, v_2, v_3 und Grundlinien $s_{2\,3}$, $s_{3\,1}$, $s_{1\,2}$ aus, so ist

$$u_1 v_1 s_{2\,3} + u_2 v_2 s_{3\,1} + u_3 v_3 s_{1\,2} = 0.$$

Lässt man hierin v_1, v_2 und v_3, d. h. die homogenen Coordinaten des Punktes variabel werden, so stellt diese Gleichung die durch die Constanten u_1, u_2, u_3 festgelegte Gerade dar, wobei die drei Punktcoordinaten durch die Gleichung

$$v_1 s_{2\,3} + v_2 s_{3\,1} + v_3 s_{1\,2} = 2 \triangle$$

verknüpft sind.

3. — Die Ableitung der homogenen Punktgleichung lässt sich so leicht direct ausführen, dass wir dieselbe noch kurz zeigen wollen.

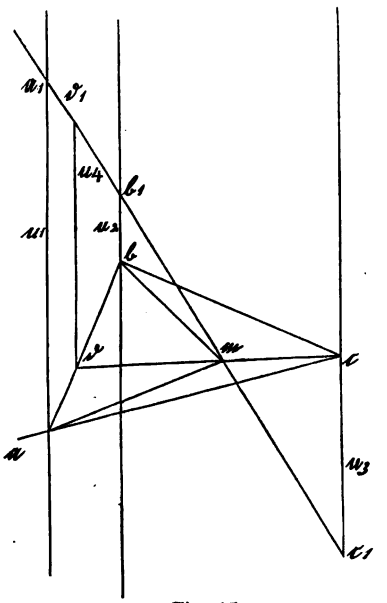

Fig. 17.

Ziehen wir durch den Punkt m in der Ebene des Grunddreiecks (Fig. 17) eine Transversale, welche die drei Parallelen durch die Ecken a, b, c des Dreiecks in a_1, b_1 und c_1 schneidet, so sind aa_1, bb_1, cc_1 die Coordinaten u_1, u_2 und u_3 der Transversale.

Ziehen wir sodann von c durch m bis nach b auf der Geraden ab, und durch b die Parallele $bb_1 = u_4$, so ist

$$u_1 . bb + u_2 . ab = u_4 . ab.$$

Es ist aber ferner

$$u_4 : u_3 = bm : -mc,$$

mithin

$$u_1 . bb . mc + u_2 . ab . mc + u_3 . bm . ab = 0.$$

Hierin ist

$$\mathfrak{b}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{m}\mathfrak{c} \,.\, \sin\delta = 2 \triangle \mathfrak{m}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = 2 \triangle_{23},$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{m}\mathfrak{c} \,.\, \sin\delta = 2 \triangle \mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{a} = 2 \triangle_{31},$$
$$\mathfrak{m}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \,.\, \sin\delta = 2 \triangle \mathfrak{m}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 2 \triangle_{12},$$

wenn δ einer der Winkel bei $\mathfrak{b}$. Daher wird unsere Gleichung zu

$$u_1 \triangle_{23} + u_2 \triangle_{31} + u_3 \triangle_{12} = 0.$$

Ueber die Bedeutung einer nicht homogenen Gleichung ersten Grades zwischen u_1, u_2 und u_3 erlangen wir Aufschluss, indem wir sie mit Hilfe der Bedingungsgleichung

$$u_1 h_{23} + u_2 h_{31} + u_3 h_{12} = 2 \triangle$$

homogen machen.

§. 31. Die Coordinaten u_1, u_2, u_3 und die Plücker'schen homogenen Coordinaten der Geraden.

Den Zusammenhang der in §. 30 benutzten homogenen Coordinaten u_1, u_2, u_3 und der Plücker'schen Coordinaten der Geraden erkennt man leicht. In beiden Coordinatensystemen gebraucht man zur Festlegung einer Geraden drei an dieselbe von den Fundamentalpunkten gezogene Strecken. Während diese aber bei uns parallel einer gegebenen Richtung gehen, stehen dieselben bei Plücker senkrecht auf den festzulegenden Geraden. Man erhält daher die Plücker'schen Strecken, unter Voraussetzung derselben Fundamentalpunkte, wenn man u_1, u_2 und u_3 mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den jene Lothe in jeder Lage der Geraden mit der festen Richtung unserer Axen machen. Diese Operation ist so einfach, dass es auf den ersten Blick unnöthig scheinen mag, neue Coordinaten statt der von jenem berühmten Mathematiker eingeführten zu benutzen. Allein die von uns angewandten Coordinaten bieten doch einige wesentliche Vortheile. Zuerst ist es ein Vorzug, dass sich, bei nur zwei Coordinaten zur Festlegung der Geraden, die Gleichung des Punktes in sehr einfacher, ja bei der von uns adoptirten Bezeichnung mehrfach in identischer Form mit der Gleichung der Geraden in cartesischen Coordinaten ergiebt, während der Versuch, eine Gleichung des Punktes zu bekommen, bei Annahme nur zweier Fundamentalpunkte und der von ihnen auf die Gerade gefällten Lothe als Coordinaten der Gerade auf complicirte Ausdrücke höheren Grades führt. Aehnliches gilt für Curven zweiter und höherer Classe. Ausserdem ist es ein nicht unwesentlicher Vorzug unserer Coordinaten einer Geraden, dass dieselben durch eine Gleichung ersten Grades von der einfachen Form

$$u_1 h_{23} + u_2 h_{31} + u_3 h_{12} + 2 \triangle$$

mit einander verbunden sind, die es leicht möglich macht, jede nicht homogene Gleichung zwischen u_1, u_2 und u_3 in eine homogene zu ver-

wandeln, während der Zusammenhang der Plücker'schen Coordinaten (vrgl. z. B. Salmon-Fiedler's Kegelschnitte) durch eine Gleichung zweiten Grades ausgedrückt wird, die nicht einmal gestattet, nicht homogene Gleichungen ungeraden Grades in homogene desselben Grades überzuführen. Schliesslich darf wohl auch die Leichtigkeit der Ableitung unserer Formeln für ihre Angemessenheit bei geometrischen Untersuchungen sprechen.

Da alle homogenen Gleichungen zwischen Plücker'schen Coordinaten durch Divison mit $\cos \varphi^k$, wobei k gleich dem Grade der homogenen Gleichung ist, in Gleichungen mit u_1, u_2 und u_3 übergeführt werden, so können wir unsere Aufgabe der Erläuterung über die neuen homogenen Coordinaten hiermit als erledigt betrachten, da die Untersuchung mit Hilfe derselben ganz gerade so geführt wird, wie mit jenen älteren homogenen Coordinaten der geraden Linie, und wir fügen nur zu, dass die Uebertragung unserer Betrachtung von Punkten in der Ebene auf Ebenen im Raum, unter Zuziehung von vier parallelen von den Eckpunkten eines Tetraeders ausgehenden Axen, ohne alle Schwierigkeit ist.

Anwendung der longimetrischen Functionen in der Mechanik.

§. 32. Kinematik der Geraden.

1. — Um die Möglichkeit der Verwendbarkeit der longimetrischen Functionen in der Mechanik zu zeigen, geben wir im Nachstehenden die Grundzüge einer Kinematik der Geraden, beschränken uns dabei aber auf Untersuchung der Bewegung in einer Ebene. Der Dualismus, den man in neuerer Zeit bei den Betrachtungen der Geometrie der Lage durchgeführt hat, indem man bei den Untersuchungen in der Ebene bald den Punkt bald die Gerade als Element annahm, während man im Raum Punkt und Ebene abwechselnd den Untersuchungen zu Grunde legte, dieser nämliche Dualismus lässt sich auch bei kinematischen Betrachtungen durchführen. Es sind dem Verfasser die hier einschlagenden Forschungen nur wenig bekannt; die folgenden Resultate verdankt er eigener Arbeit.

Als bekannt setzen wir voraus die in den Anfängen der Kinematik des Punktes erörterten einfachsten Gesetze über die Zusammensetzung und Zerlegung von Translations- und Rotationsbewegungen. Wie man aber

bei der Bewegung eines Punktes absieht von der Rotation des Punktes um sich selbst, so wollen wir hier nicht berücksichtigen eine Verschiebung der Geraden in ihrer eigenen Richtung. Bei der Festlegung des Punktes durch cartesische Coordinaten und der Geraden durch die von uns benutzten Linniencoordinaten würde es uns sogar unmöglich sein, eine derartige Bewegung auszudrücken, ohne andere Elemente zuzuziehen, da die Rotation des Punktes um sich und die Verschiebung der Geraden in ihrer Richtung die Coordinaten dieser Elementargebilde ungeändert lässt.

2. — Hat ein ebenes Gebilde eine Rotationsbewegung mit der Geschwindigkeit w um eine Axe, die in dem Punkte $\mathfrak{m}$ senkrecht auf dieser Ebene steht, und wir denken uns in dieser Ebene durch $\mathfrak{m}$ eine Gerade m gezogen, welche auf zwei parallelen festen Axen die Coordinaten x und y abschneidet, so lässt sich die Winkelgeschwindigkeit w dieser Geraden zerlegen in w' und w'' mit den Rotationscentren in $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}''$, d. h. den Schnittpunkten der Geraden m mit den Axen. Und zwar ist

$$w' = w \operatorname{Cos} \mathfrak{m},$$
$$w'' = w \operatorname{Sin} \mathfrak{m},$$

wobei die rechts stehenden Ausdrücke die longimetrischen Functionen des Punktes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf die parallelen Axen enthalten.

Geht die Gerade m nicht durch das momentane Rotationscentrum des ebenen Systems, so wird an den vorstehenden Betrachtungen wenig geändert. Wir dürfen nämlich eine Rotation um den Punkt $\mathfrak{p}$, ausserhalb der Geraden m, nach einem beliebigen Punkte $\mathfrak{m}$ dieser Geraden verlegen, wenn wir nur noch eine Translation hinzufügen, deren Richtung auf $\mathfrak{p}\,\mathfrak{m}$ senkrecht ist. Wählen wir nun zum Punkte $\mathfrak{m}$ den Fusspunkt des von $\mathfrak{p}$ auf die Gerade m gefällten Lothes und verlegen dorthin die Rotation, so fällt die beizufügende Translation in die Richtung von m selbst und kann nach den in (1) gemachten Annahmen für unsere jetzigen Betrachtungen vernachlässigt werden.

Die beiden Rotationsgeschwindigkeiten w' und w'' auf den Coordinatenaxen lassen sich nach den Anfängen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ dieser Axen verlegen, wenn man noch die zu den Axen senkrechten Translationen

$$-w'x = -wx \operatorname{Cos} \mathfrak{m}$$

und

$$-w''y = -wy \operatorname{Sin} \mathfrak{m}$$

hinzugefügt. Diese Translationen setzen sich zusammen zu einer Translation mit der Geschwindigkeit

$$-w(x \operatorname{Cos} \mathfrak{m} + y \operatorname{Sin} \mathfrak{m}) = -wp,$$

wenn man mit p den axenparallelen Abstand des Punktes $\mathfrak{m}$ von der Mittellinie $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ bezeichnet. Wir haben also die Rotation um $\mathfrak{m}$ mit der

Geschwindigkeit w zerlegt in die zwei Rotationen um ξ und η mit den Geschwindigkeiten

$$w' = w \operatorname{Cos} m,$$
$$w'' = w \operatorname{Sin} m$$

und in die Translation senkrecht zu den Axen mit der Geschwindigkeit — w p.

Wollen wir nur die Bewegung einer Geraden in unserer Ebene ins Auge fassen, so müssten wir die vorstehende Translation nochmals zerlegen in eine zu dieser Geraden senkrechte und eine zu ihr parallele. Die letztere liesse sich dann vernachlässigen. Für die Bewegung des ganzen Systems gelten dagegen vorstehende Ausdrücke in ihrer vollen Form.

3. — Haben wir in der Ebene unsrer Coordinatenaxen n Rotationen um die Centra

$$m_1, m_2, \ldots . m_n$$

und mit den Geschwindigkeiten

$$w_1, w_2, \ldots . w_n,$$

so können wir dieselben durch die in (2) angegebenen Zerlegungen zurückführen auf die Rotationen in ξ und η mit den Geschwindigkeiten

$$W_\xi = w_1 \operatorname{Cos} m_1 + w_2 \operatorname{Cos} m_2 + \ldots + w_n \operatorname{Cos} m_n,$$
$$W_\eta = w_1 \operatorname{Sin} m_1 + w_2 \operatorname{Sin} m_2 + \ldots + w_n \operatorname{Sin} m_n,$$

nebst einer Translation senkrecht zu den Axen mit der Geschwindigkeit

$$V = -[w_1 p_1 + w_2 p_2 + \ldots . + w_n p_n].$$

Soll daher das ebene System unter dem Einfluss dieser Rotationen in Ruhe bleiben, so muss

$$W_\xi = 0, \; W_\eta = 0, \; V = 0.$$

sein. Und wenn wir

$$w' = w \operatorname{Cos} m$$
$$w'' = w \operatorname{Sin} m$$

die Projectionen der Geschwindigkeit w auf die parallelen Axen nennen, während wir w p als das Moment von w in Bezug auf die Mittellinie $\xi\,\eta$ bezeichnen, (vorausgesetzt, dass die Axen senkrecht zur Mittellinie sind), so können wir obige Bedingungsgleichungen so aussprechen: n Rotationen um parallele Axen halten einander das Gleichgewicht, wenn die Summe der Projectionen ihrer Geschwindigkeiten auf zwei parallele Coordinaten-Axen in einer zu den Rotationsaxen senkrechten Ebene, und die Summe der Momente jener Geschwindigkeiten, bezogen auf eine zu den Coordinatenaxen senkrechte Gerade, einzeln genommenen gleich Null sind.

4. — Unter der Elementaracceleration einer Geraden wollen wir die Rotationsgeschwindigkeit d u verstehen, die zur Zeit t zu der Geschwindigkeit w hinzutreten muss, um diese letztere nach Grösse und Stelle des Rotationscentrums überzuführen in die Geschwindigkeit w_1 zur Zeit $t + dt$.

Nehmen wir an, die in der Zeit dt wirkende Ursache, welche du erzeugt, wirke während der Zeiteinheit, so würde dadurch um dieselbe Rotationsaxe, die du hat, ein Zuwachs an Rotationsgeschwindigkeit entstehen, der gleich

$$\frac{du}{dt}$$

wäre. Diesen Zuwachs bezeichnen wir als die Acceleration der Bewegung und nennen ihn φ, so dass

$$\varphi = \frac{du}{dt}.$$

Da die Rotationsaxe von du, die wir hier parallel zu der von w voraussetzen, im Allgemeinen nicht mit der von w zusammenfällt, so wird für diesen Fall du die Grösse der Rotationsgeschwindigkeit und die Stelle der Axe ändern. Nur wenn die Acceleration zu einer Translationsacceleration wird, ändert sich die Grösse von w nicht, und nur wenn die Axe der Acceleration mit der von w zusammenfällt, bleibt die Lage dieser Axe ungeändert.

Nehmen wir an, die Gerade m rotire continuirlich um die Punkte m, m_1, etc. einer Curve, d. h. sie umhülle bei ihrer Bewegung diese Curve und es sei m zur Zeit t der Rotationspunkt, die Elementaracceleration du habe dagegen in diesem Augenblicke ihr Centrum in dem Punkte p. Durch Zusammensetzung von w mit du muss dann die Gerade eine Rotation um den Punkt m_1 d. h. den m benachbarten Punkt unserer Curve annehmen. Diese neue Rotation hat zur Geschwindigkeit $w + du$. Anstatt dieselbe aber um m_1 erfolgen zu lassen, verlegen wir sie nach m, müssen dann freilich eine Translation von der Grösse

$$(w + du)\, m_1 m$$

hinzufügen. Da $m_1 m = ds$, d. h. gleich dem Differential des Curvenbogens, so ist diese Translation gleich

$$(w + du)\, ds,$$

welches sich mit Vernachlässigung des unendlich Kleinen zweiter Ordnung auf

$$w \cdot ds$$

reducirt. Diese Translation entspricht einer Translationsgeschwindigkeit

$$w \cdot \frac{ds}{dt} = w \cdot v,$$

wenn zugleich v die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher die Rotationscentra auf der Curve wechseln, oder die Geschwindigkeit mit welcher der Berührungspunkt von m mit der Curve längs der letzteren hin seine Stelle ändert.

Wir haben so statt der Rotationsacceleration in p von der Grösse

$$\varphi = \frac{d u}{d t}$$

nun eine Rotationsacceleration

$$\varphi_r = \frac{d u}{d t}$$

in m, wofür wir auch $\frac{d w}{d t}$ setzen können, da ja in der That d u der Zuwachs an Geschwindigkeit ist, den w in der Zeit d t erleidet; und ausserdem noch eine Translationsacceleration

$$\varphi_n = w v,$$

welche normal zur Tangente und zwar nach aussenhin, d. h. von der concaven nach der convexen Seite wirkt. Von dieser letzteren Eigenschaft überzeugen wir uns durch folgende Betrachtung.

Da der Zutritt der Elementaracceleration d u zu der Geschwindigkeit w die Tangente aus der Rotation um m in die Rotation um m_1 überführen soll, so muss p, das Rotationscentrum von d u, auf derjenigen Seite der Tangente liegen, wo die Curve auch liegt. Da nun im Allgemeinen m_1 zwischen m und p liegt, so wird durch Verlegung von w + d u aus m_1 nach m eine Translationscomponente nöthig, die den Punkt m und mithin die ganze Tangente nach der convexen Seite der Curve führt, wie sich ergiebt, wenn man diese Verlegung vornimmt mit Hilfe der in m angebrachten Rotationen mit den Geschwindigkeiten + d u und — d u. Die letztere erzeugt dann mit der in m_1 wirkenden d u die nach aussen gerichtete Translation

$$d u \,.\, m_1 m.$$

Der Translationsacceleration

$$\varphi_n = w \,.\, v$$

lassen sich noch zwei andere Formen geben. Es ist nämlich

$$\varphi_n = w \,.\, v = \frac{d \tau}{d t} \cdot \frac{d s}{d t} = \frac{d \tau^2}{d t^2} \cdot \frac{d s}{d \tau} = w^2 \,.\, \varrho,$$

da $d s : d \tau = \varrho$, d. h. gleich dem Krümmungshalbmesser ist. Andrerseits haben wir

$$\varphi_n = w \,.\, v = \frac{d \tau}{d t} \cdot \frac{d s}{d t} = \frac{d \tau}{d s} \cdot \frac{d s^2}{d t^2} = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Wir finden also für die Translationsacceleration hier ganz dieselben Werthe, wie für die Normalacceleration bei der Punktbewegung; dagegen erzeugt letztere eine centripetale, erstere eine centrifugale Bewegung.

Die Rotationsacceleration φ_r lässt sich noch nach den Axen zerlegen in

$$\varphi'_r = \varphi_r \operatorname{Cos} m,$$
$$\varphi''_r = \varphi_r \operatorname{Sin} m.$$

Diese beiden Componenten lassen endlich eine Verlegung nach den Fundamentalpunkten ξ und η auf der Mittellinie zu, wodurch ihre Grösse nicht geändert wird, nur muss jetzt noch die Translationsacceleration $-\varphi_r p$ hinzutreten.

5. — Ist die Lage einer Geraden durch die parallelen Coordinaten x und y bestimmt, und sind letztere als Functionen der Zeit gegeben, so ist es leicht, die Gesetze der Bewegung der Geraden zu bestimmen. Ist z. B. $x = a t$, $y = \pm \frac{b}{t}$ so ist

$$x y = \pm a b$$

die Gleichung der von den beweglichen Geraden umhüllten Curve, d. h. einer Ellipse oder Hyperbel. Die Lage des momentanen Rotationspunktes der Geraden finden wir, indem wir denselben als den Schnitt der Geraden mit den Coordinaten x, y und $x + \triangle x$, $y + \triangle y$ an der Grenze betrachten. Es ist dann für diesen Rotations- resp. Berührungspunkt m der Geraden

$$\operatorname{Cot} m = -\frac{d y}{d x} = -f'(x),$$

wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Curve in parallelen Tangentencoordinaten ist.

Die Rotationsgeschwindigkeit w der Geraden m ergiebt sich folgendermassen. Macht m mit den Axen den Winkel Θ, so ist

$$\cot \Theta = \frac{y - x}{e},$$

wenn e der Abstand der parallelen Axen. Daher ist

$$\Theta = \operatorname{arc\ cot} \frac{y - x}{e},$$

$$d\Theta = \frac{d x - d y}{e^2 + (y - x)^2} \cdot e.$$

Da aber

$$\frac{d\Theta}{d t} = w,$$

d. h. gleich der Winkelgeschwindigkeit ist, so erhalten wir

$$w = (V_x - V_y) \cdot \sin \Theta^2 : e,$$

wenn wir

$$\frac{d x}{d t} = V_x,$$

$$\frac{d y}{d t} = V_y$$

nennen. Es sind diese beiden Werthe die Geschwindigkeiten, mit denen die Schnittpunkte der Geraden m längs den Axen hin ihre Stellung ändern. Wir könnten sie die Geschwindigkeiten von m auf den Axen oder die Axengeschwindigkeiten nennen.

Aus dem oben gegebenen Ausdruck für w lassen sich nun auch Werthe für

$$\varphi_r = \frac{dw}{dt},$$

und

$$\varphi_n = w^2 \cdot \varrho$$

finden, wenn wir für ϱ den früher (§. 29, 5) gefundenen Werth

$$\varrho = \frac{[e^2 + (y-x)^2]^{3/2}}{e} \cdot \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{(dx - dy)^3}$$

benutzen.

Bewegt sich z. B eine Gerade m so, dass sie den Kreis

$$xy = {}^1/_4 e^2 = r^2$$

umhüllt, so ist

$$x = r \cdot \operatorname{tg} {}^1/_2 \mu,$$
$$y = r \cdot \cot {}^1/_2 \mu,$$

wobei μ der Winkel am Mittelpunkt ist, gebildet von dem Radius nach dem Berührungspunkt und der Mittellinie.

Es ist aber $\mu = \Theta$, daher ist

$$x = r \cdot \operatorname{tg} {}^1/_2 \Theta,$$
$$y = r \cdot \cot {}^1/_2 \Theta,$$

und hieraus können wir V_x und V_y ermitteln, wenn wir $\mu = \Theta = kt$ einfach der Zeit proportional annehmen. Es ist jetzt

$$V_x = \frac{rk}{2 \cos {}^1/_2 \Theta^2},$$

$$V_y = \frac{-rk}{2 \sin {}^1/_2 \Theta^2}.$$

Daher ist

$$w = \frac{rk}{2 \cos {}^1/_2 \Theta^2 \sin {}^1/_2 \Theta^2} \cdot \frac{\sin \Theta^2}{e} = k$$

da $e = 2r$ ist. Die Acceleration dieser Bewegung reducirt sich daher auf die Translationsacceleration

$$w^2 \varrho,$$

d. h. hier auf $k^2 r$.

Wenn in der That eine durch zwei aufeinanderfolgende Punkte eines Kreises gehende Sehne unter dem Einfluss einer centrifugalen Acceleration $k^2 r$ steht, so geht sie in der Zeit dt nach aussen um

$${}^1/_2 k^2 r \cdot dt^2,$$

wie man mit Benutzung der bekannten Formel

$$x = {}^1/_2 g t^2$$

für gleichförmig beschleunigte Bewegung findet. Durch Rotation um den Halbirungspunkt der Sehne ds mit der Rotationsgeschwindigkeit k bewegt sich deren Endpunkt nach innen um

$$k \cdot {}^1/_2 ds \cdot dt = {}^1/_2 kr \cdot d\Theta \cdot dt,$$

wenn $d\Theta$ der Winkel der nach den Endpunkten von ds gehenden Radien ist. Sollen diese beiden Verschiebungen einander gleich sein, so muss

$$d\Theta = k\,dt$$

d. h.

$$w = k$$

sein, was in der That der Fall ist.

Die Untersuchung der Bewegung einer Geraden um einen Kegelschnitt lässt sich mit Benutzung der Gleichung

$$xy = \pm b^2$$

leicht führen, ebenso die Bewegung der Tangente der Cykloide, wenn wir diese Curve betrachten als umhüllt von dem Durchmesser eines Kreises mit dem Radius $2r$, wenn dieser Kreis längs der Basis rollt. Nimmt man hierbei die im Anfang und Ende des Cykloidenbogens einer Umwälzung errichteten Senkrechten auf der Basis als die x und y Axen an, so ist für die Tangente m, welche mit den Axen den Winkel Θ macht,

$$x = 2r - 2r\,\Theta \cdot \cot\Theta,$$
$$y = x + 2\pi r \cot\Theta.$$

Setzt man hierin $\Theta = kt$, so ist auch eine Abhängigkeit der Coordinaten von der Zeit festgestellt, die einem gleichmässigen Rollen des Kreises entspricht.

5. — Eine durch ihre parallelen Coordinaten festgelegte Gerade bestimmt mit der Mittellinie und den beiden Axen ein Trapez, dessen doppelter Inhalt, bei senkrechter Stellung der Axen zur Mittellinie,

$$2T = e(x + y).$$

Daher ist

$$2\frac{dT}{dt} = e(V_x + V_y).$$

Setzen wir nun

$$\frac{dT}{dt} = V$$

und nennen V die Streifen- oder Flächengeschwindigkeit der Geraden m, so ist, wenn wir auch noch $e = 1$ annehmen,

$$V = {}^1/_2 (V_x + V_y),$$

eine Formel, die vollständig analog ist der bekannten Beziehung für die Bewegung des Punktes

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Zugleich sieht man leicht die Uebertragbarkeit der neuen Formel auf den Raum, wo für die Ebene M, mit den Coordinaten x, y, z auf drei parallelen Axen, der Inhalt P des prismatischen Pfeilers

$$P = {}^1/_3 (x + y + z)\,\triangle$$

ist, so dass wir

$$\frac{dP}{dt} = V = {}^1/_3(V_x + V_y + V_z)\triangle$$

haben, wenn $\triangle$ der Inhalt des Dreiecks ist, das zu Ecken die Anfänge der drei parallelen und zu diesem Dreieck senkrechten Axen hat.

Nennen wir noch

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \Phi$$

die Streifenacceleration der Geraden, so ist

$$\Phi = \frac{dV_x}{dt} + \frac{dV_y}{dt} = \Phi_x + \Phi_y,$$

worin nun Φ_x und Φ_y die Accelerationen für die Bewegungen der Schnittpunkte der Geraden m längs den Axen hin sind.

Setzt man z. B. die Streifenacceleration dem Trapeze T direct oder umgekehrt proportional, oder auch gleich

$$\frac{k}{(x+y)^2},$$

so lassen sich hieran Untersuchungen anknüpfen, welche den bekannten Aufgaben aus der Mechanik des Punktes, wobei man die Acceleration einer Function des Radiusrectors proportional annimmt, entsprechend verlaufen, und wobei die von m umhüllten Curven theilweise auch Kegelschnitte sind.

6. — Betrachtet man

$$\xi = V_x \text{ und } \eta = V_y$$

als die Coordinaten einer Geraden m', so wird man zu einer Curve geführt, die dem Hodographen von Hamilton vollständig entspricht, und die ähnlich wie der Hodograph der Punktbewegung Aufschlüsse über die Bewegung der Geraden m liefert.

Wie man bei der Bewegung eines Punktes auf einer ebenen Curve nach der Richtung fragen kann, die er in jedem Augenblicke hat, so ist bei der Bewegung der Geraden der Rotationspunkt in jedem Momente wichtig, da er den Berührungspunkt der Geraden mit der von ihr umhüllten Curve abgiebt. Roberval ist es bekanntlich zuerst gelungen, mit Benutzung der Zerlegung der Bewegung des Punktes, der eine Curve beschreibt, Methoden anzugeben für die Construction der Tangenten an eine Reihe solcher Curven. Ganz entsprechend lässt sich hier der Berührungspunkt der Tangenten finden durch Zerlegung der momentanen Rotation der Geraden, entweder in zwei neue Rotationen oder in eine Rotation und eine Translation. Betrachtet man z. B. Ellipse und Hyperbel als umhüllt von Geraden, die auf zwei parallelen Geraden (den Axen) Strecken abschneiden, deren Product constant ist, so lässt sich leicht zeigen, dass die Rotationsgeschwindigkeit w um den Berührungspunkt sich

in zwei Rotationen um die Schnittpunkte der Tangente mit den Axen und mit w' und w'' als Geschwindigkeiten zerlegen lässt, die so beschaffen sind, dass sie sich verhalten umgekehrt wie x zu y. Man braucht daher das zwischen den Axen liegende Stück der Tangente nur im umgekehrten Verhältniss der Axenabschnitte zu theilen, um den Berührungspunkt zu bekommen.

Betrachtet man die Parabel als umhüllt von dem zweiten Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel längs einer Geraden, dessen anderer Schenkel durch einen festen Punkt gleitet, so kann man die Rotation der Tangente um ihren Berührungspunkt zerlegen in eine Rotation um den Schnittpunkt mit der Scheiteltangente und eine entsprechende Translation. Durch Betrachtung der sich hieraus ergebenden Gleichungen findet man, dass die Scheiteltangente das zwischen dem Berührungspunkt und der Axe der Parabel liegende Stück der Tangente halbirt, und hat somit ein Mittel gefunden, um den Berührungspunkt zu bestimmen.

Die Cykloide wird umhüllt von dem Durchmesser eines Kreises, der längs einer Geraden rollt. Der Radius dieses Kreises muss aber die doppelte Länge haben, wie der Radius der Kreislinie, deren Punkte dieselbe Cykloide beschreiben würden. Durch verschiedene Zerlegungen der Rotation lässt sich nun als Berührungspunkt der Tangente der Fusspunkt des vom Rotationspunkt des rollenden Kreises auf die Tangente gefällten Lothes nachweisen. Die einfachste Betrachtung ist wol folgende. Die Rotation des Systems um den Berührungspunkt des rollenden Kreises mit der Basis kann nach jedem Punkte der Tangente der Cykloide verlegt werden. Doch muss jedesmal eine Translation hinzugefügt werden, die senkrecht steht auf dem Abstand des alten von dem neuen Rotationscentrum. Nur wenn man den Fusspunkt des vom alten Centrum auf die Tangente gefällten Lothes als neues Centrum wählt, fällt die Translation in die Richtung der Tangente, verschwindet also für unsere Betrachtung, nach den in (1) gemachten Voraussetzungen über die Verschiebung der Geraden in sich; es ist also dieser Fusspunkt der Rotations- resp. Berührungspunkt der Tangente an die Cykloide.

Nicht uninteressant ist die Cykloidenbewegung der Geraden auch dadurch, dass man sie entstanden denken kann, indem man die Gerade um einen ihrer Punkte gleichförmig rotiren lässt, während dieser Punkt längs einer Geraden, der Scheiteltangente der Cykloide, gleichförmig fortschreitet.

Ueber complexe longimetrische Ausdrücke.

§. 33. Die Moivre'sche Formel für longimetrische Functionen.

1. — Es giebt für die longimetrischen Functionen einen Factor j, welcher bewirkt, dass

$$(\mathrm{Cos}\, c + j\, \mathrm{Sin}\, c)\,(\mathrm{Cos}\, b + j\, \mathrm{Sin}\, b) = \mathrm{Cos}\,(c + b) + j\, \mathrm{Sin}\,(c + b)$$

ist. Der absolute Werth des Factors j ist gleich 1, d. h. durch Multiplication einer Grösse mit j wird ebenso wenig wie bei der Multiplication mit i oder mit j_λ der Werth dieser Grösse verändert, wol aber findet dadurch eine Aenderung in der Stelle dieser Grösse statt, wie wir diess später zeigen werden.

Als charakteristische Gleichung für j stellen wir hier fest, dass

$$j^2 = 2j - 1.$$

Man kann zwar sagen, da diese Gleichung aus

$$j - 1 = 0$$

durch Quadrirung abgeleitet werden kann, so ist j identisch mit 1; allein wir werden diesem Einwurf entgegen halten, dass der Grösse nach allerdings j denselben Werth wie 1 hat, dass aber zwei Grössen von demselben absoluten Werthe deshalb noch nicht zur Summe (und so können wir ja $j - 1 = j + (-1)$ auffassen) Null ergeben, d. h. sich vollständig aufheben oder vernichten müssen, obschon ihre algebraische Summe Null ist. Erläutert wird diese Behauptung durch das Beispiel gleicher aber entgegengesetzt gerichteter Translations- oder Rotationsgeschwindigkeiten, welche an verschiedenen Punkten eines räumlichen Systems angebracht sind, und von denen erstere eine Rotationsbewegung, letztere eine Translation hervorrufen, statt einander aufzuheben.

Wenn wir daher in Zukunft auch häufig von der Gleichung

$$j^2 = 2j - 1$$

Gebrauch machen, so werden wir doch nie die Gleichung

$$j - 1 = o$$

benutzen. Der scheinbare Widerspruch wird sich, wie wir hoffen, eben dadurch heben, dass wir zeigen, j und 1 sind allerdings Einheiten, aber an verschiedenen Stellen im Raume. Sobald aber die Stelle im Raume, die eine Grösse einnimmt, mit zu ihrer Charakterisirung eingeführt wird, so sind absolut gleiche Grössen nicht mehr gleichwerthig, wenn sie sich an verschiedenen Orten befinden, eine Behauptung, die sich ja auch leicht an Beispielen aus dem praktischen Leben als richtig nachweisen liesse.

Multipliciren wir den Ausdruck

$$(\mathrm{Cos}\, c + j\, \mathrm{Sin}\, c)\,(\mathrm{Cos}\, b + j\, \mathrm{Sin}\, b)$$

aus, indem wir j wie einen reellen Factor behandeln, so erhalten wir

$$\text{Cos c Cos b} + \text{j (Cos c Sin b} + \text{Sin c Cos b)} + \text{j}^2 \text{Sin c Sin b.}$$

Wenden wir hierauf die Bedingungsgleichung

$$\text{j}^2 = 2\text{j} - 1$$

an, so wird dieser Ausdruck zu

$$\text{Cos c Cos b} - \text{Sin c Sin b} + \text{j (Sin c Cos b} + \text{Cos c Sin b} + 2\,\text{Sin c Sin b).}$$

Mit Benutzung der Formeln in §. 16, 1 erhalten wir daher

$$\text{(Cos c} + \text{j Sin c) (Cos b} + \text{j Sin b)} = \text{Cos (c} + \text{b)} + \text{j Sin (c} + \text{b).}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich leicht herleiten, dass

$$(\text{Cos c}_1 + \text{j Sin c}_1)\ (\text{Cos c}_2 + \text{j Sin c}_2) \ldots . (\text{Cos c}_n + \text{j Sin c}_n)$$
$$= \text{Cos}\ (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) + \text{j Sin}\ (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$$

ist, und ebenso dass

$$(\text{Cos c} + \text{j Sin c})^n = \text{Cos n c} + \text{j Sin n c,}$$

wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. Die Erweiterung dieser Formel auf negative, gebrochene und irrationale Exponenten erfolgt auf dieselbe Weise, wie diess bei der Moivre'schen Formel

$$(\cos\varphi + \text{i}\sin\varphi)^n = \cos\text{n}\,\varphi + \text{i}\sin\text{n}\,\varphi$$

geschieht. Dadurch ist aber die Giltigkeit der Moivre'schen Formel auch für longimetrische Functionen unter Annahme eines j nachgewiesen, für welches die Gleichung

$$\text{j}^2 = 2\text{j} - 1$$

gilt.

2. — Wir können uns nun auch complexe Zahlen denken von der Form

$$\text{a} + \text{j b}$$

und mit denselben rechnen. Damit diese longimetrisch complexen Zahlen die gewöhnlichen reellen Zahlen umfassen, werden wir die Definition der einzelnen Rechnungsarten nur so zu bilden haben, dass dadurch die Operationen mit Ausdrücken ohne j als besondere Fälle auftreten. Wir wollen diess dadurch thun, dass wir feststellen, alle Rechnungen mit longimetrisch complexen Zahlen werden so ausgeführt, als wäre j ein reeller Zahlenfactor. Berücksichtigt man dabei noch, dass

$$\text{j}^2 = 2\,\text{j} - 1,$$

oder, da

$$\text{j} = \text{Cos}\ 1 + \text{j Sin}\ 1 = \text{Cos}\ \alpha\text{b} + \text{j Sin}\ \alpha\text{b}$$

gesetzt werden darf, dass

$$\text{j}^n = (\text{Cos}\ 1 + \text{j Sin}\ 1)^n = \text{Cos n} + \text{j Sin n} = \text{Cos n}\,.\,\alpha\text{b} + \text{j Sin n}\,.\,\alpha\text{b}$$

ist, so lässt sich das Resultat der Rechnungen mit longimetrisch complexen Zahlen immer wieder auf die Form

$$\text{a} + \text{j b}$$

bringen. Wir finden so z. B.

$$(a + j\,b) \pm (c + j\,d) = a \pm c + j\,(b \pm d),$$
$$(a + j\,b)\,(c + j\,d) = a\,c - b\,d + j\,(a\,d + b\,c + 2\,b\,d).$$

Es ist ferner

$$\frac{a + j\,b}{c + j\,d} = \frac{(a + j\,b)\,(m + j\,n)}{(c + j\,d)\,(m + j\,n)}$$
$$= \frac{a\,m - b\,n + j\,(a\,n + b\,m + 2\,b\,n)}{c\,m - d\,n + j\,(c\,n + d\,m + 2\,d\,n)}.$$

Nimmt man nun m und n so an, dass

$$c\,n + d\,m + 2\,d\,n = 0$$

wird, so erhält man als Quotient zweier longimetrischer Complexen einen neuen longimetrisch complexen Ausdruck. Die vorstehende Gleichung liefert aber

$$\frac{m}{n} = -\frac{c + 2\,d}{d}.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes erhalten wir

$$\frac{a + j\,b}{c + j\,d} = \frac{a\,c + 2\,a\,d + b\,d + j\,(b\,c - a\,d)}{(c + d)^2}.$$

3. — Die Rechnung mit longimetrischen Complexen vereinfacht sich vielfach, wenn man die einzelnen Complexen auf eine reducirte Form, d. h. auf die Form $u\,(\mathrm{Cos}\,c + j\,\mathrm{Sin}\,c)$ bringt. Diess geschieht auf folgende Weise. Es ist

$$a + j\,b = (a + b)\left(\frac{a}{a + b} + j\,\frac{b}{a + b}\right)$$
$$= u\,(\mathrm{Cos}\,c + j\,\mathrm{Sin}\,c),$$

wenn wir $a + b = u$ setzen und

$$\frac{a}{u} = \mathrm{Cos}\,c,\quad \frac{b}{u} = \mathrm{Sin}\,c,$$

mithin

$$\mathrm{Tang}\,c = \frac{b}{a}$$

annehmen.

Stellen in dem Ausdruck

$$a + j\,b$$

a und b zwei Strecken dar, welche auf den Axen eines Geradencoordinatensystems (vergl. §. 20) von ξ und η aus abgeschnitten sind, so können wir uns unter u eine dritte Strecke denken, deren absolute Länge gleich $a + b$ ist, die aber in dem Punkte c der Mittellinie parallel zu den Axen angebracht ist, wobei c so liegt, dass

$$\mathrm{Tang}\,c = \frac{b}{a}.$$

Hiermit ist eine Bedeutung des u ganz nach Analogie der Bedeutung von ϱ in

$$\varrho\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

gewonnen, ohne dass jedoch das Vorstehende als Beweis für diese Annahme gelten könnte. Eine schärfere Begründung dieser Deutung von

$$\mathrm{u}\,(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{c} + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{c})$$

findet sich erst im folgenden Paragraphen.

Ist nun

$$\mathrm{u}_{\mathfrak{c}} = \mathrm{u}\,(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{c} + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{c}),$$
$$\mathrm{v}_{\mathfrak{b}} = \mathrm{v}\,(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{b}),$$

und nehmen wir an, dass, um reducirte Ausdrücke mit einander zu multipliciren, man die reellen Factoren mit einander und ebenso die complexen Theile mit einander multiplicirt, in Uebereinstimmung mit der früheren Annahme in Bezug auf die Rechnung mit j, so ist

$$\mathrm{u}_{\mathfrak{c}}\,\mathrm{v}_{\mathfrak{b}} = \mathrm{u}\,\mathrm{v}\,\big(\mathrm{Cos}\,(\mathfrak{c}+\mathfrak{b}) + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}\,(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})\big)$$

und

$$\mathrm{u}_{\mathfrak{c}} : \mathrm{v}_{\mathfrak{b}} = \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\,\big(\mathrm{Cos}\,(\mathfrak{c}-\mathfrak{b}) + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}\,(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})\big).$$

Das letzte Resultat ergiebt sich dadurch, dass man den Bruch

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\mathfrak{c} + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{c}}{\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{b}}$$

in Zähler und Nenner mit

$$\mathrm{Cos}\,(-\mathfrak{b}) + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}\,(-\mathfrak{b})$$

multiplicirt.

§. 34. Herleitung des Factors j.

1. — Es ist bis jetzt noch nicht angegeben worden, wie j ermittelt wurde, welcher algebraische Ausdruck statt seiner gesetzt werden darf, und welche geometrische Bedeutung wir ihm beizulegen haben.

Da die longimetrischen Functionen nur ein besonderer Fall der allgemeinen goniometrischen Functionen sind, und sich jene aus diesen dadurch ergeben, dass man den Basiswinkel $\lambda = 0$ annimmt, so werden wir auch aus j_λ ein j_0 erhalten, wenn wir $\lambda = 0$ setzen. Es ist aber

$$\mathrm{j}_\lambda = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}},$$

daher

$$\mathrm{j}_0 = (-1)^0.$$

Da der letzte Ausdruck auch

$$\mathrm{j}_0 = \sqrt[\infty]{-1}$$

ist, so sieht man, dass dem j_0 eine gewisse Unbestimmtheit und Vieldeutigkeit anhaften. Diess mag theilweise seinen Grund darin haben, dass j_0 die Eigenschaft zukommt, um die Längeneinheit zu verschieben, diese Länge aber eine willkürliche ist. Jene Unbestimmtheit existirt nicht, wenigstens nicht in demselben Masse, für

$$i = \sqrt[2]{-1},$$

und auch nicht allgemein für

$$j_\lambda = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}},$$

scheint dagegen für j_0 in der Natur dieses Verschiebungsfactors begründet zu sein.

2. — Die Ableitung der longimetrisch complexen Ausdrücke aus den goniometrischen kann direct so erfolgen.

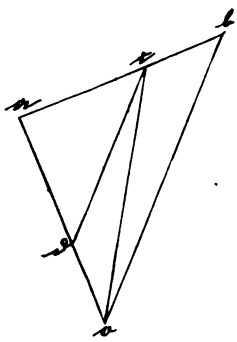

Fig. 18.

Es sei Winkel $a\,o\,b$ (Fig. 18) gleich λ. Nehmen wir nun auf $a\,b$ einen Punkt c an, verbinden denselben mit o, ziehen dann $c\,b \parallel b\,o$, so ist

$$o\,c = o\,b + j_\lambda\, b\,c,$$

oder es ist, wenn wir $o\,c$ mit r_c bezeichnen

$$r_c = r\,{}^\lambda\mathrm{Cos}\,a\,o\,c + j_\lambda\, r\,{}^\lambda\mathrm{Sin}\,a\,o\,c$$
$$= r\,({}^\lambda\mathrm{Cos}\,a\,o\,c + j_\lambda\,{}^\lambda\mathrm{Sin}\,a\,o\,c).$$

Lässt man nun die Punkte a, b, c fest bleiben, während o auf der Richtung $c\,o$ ins Unendliche rückt, so bleibt vorstehende Gleichung fortwährend richtig, es gehen nur an der Grenze Sin, Cos und j_λ in die entsprechenden longimetrischen Ausdrücke über. Da nämlich

$${}^\lambda\mathrm{Cos}\,a\,o\,c = \frac{o\,b}{o\,c},$$

$${}^\lambda\mathrm{Sin}\,a\,o\,c = \frac{b\,c}{o\,c},$$

und da wir bei grösser werdendem $c\,o$ ohne merklichen Fehler $a\,o = c\,o$ setzen können, so wird

$${}^\lambda\mathrm{Cos}\,a\,o\,c = \frac{o\,b}{o\,c} = \frac{o\,b}{o\,a} = \frac{b\,c}{b\,a} = \frac{c\,b}{a\,b} = \mathrm{Cos}\,c,$$

und da an der Grenze $o\,c$ gleich $o\,b$ wird, so ist

$${}^\lambda\mathrm{Sin}\,a\,o\,c = \frac{b\,c}{o\,c} = \frac{b\,c}{o\,b} = \frac{a\,c}{a\,b} = \mathrm{Sin}\,c,$$

wenn die longimetrischen Functionen von c auf $a\,b$ als Einheit bezogen werden. Es ist daher an der Grenze

$$r_c = r\,.\,(\mathrm{Cos}\,c + j_0\,\mathrm{Sin}\,c).$$

Da nun r_c nur r in dem Punkte c mit der Richtung c o bedeutet, und wir

$$r_c = r \,.\, f(c)$$

setzen können, d. h. r multiplicirt mit einem gewissen Factor, den wir den Stellen- oder Verschiebungsfactor nennen wollen, so haben wir

$$r \,.\, f(c) = r\,(\mathrm{Cos}\, c + j_0 \,\mathrm{Sin}\, c),$$

oder

$$f(c) = \mathrm{Cos}\, c + j_0 \,\mathrm{Sin}\, c.$$

Wir dürfen hieraus schliessen, dass f(c) ein Factor ist, der mit einer Strecke u von gegebener Richtung multiplicirt, andeutet, dass diese Strecke ihren Anfang im Punkte c der Mittellinie a b hat, wenn Sin c und Cos c auf a b als Basis bezogen sind. Dabei braucht u nicht senkrecht zu a b zu sein, sondern kann einen beliebigen Winkel damit bilden, wie aus obiger Ableitung hervorgeht, die etwas einfacher wird, wenn man a o b ein gleichschenkliges Dreieck sein lässt, wo dann aber an der Grenze r_c senkrecht auf a b ist.

Liegt der Punkt c in a, so ist

$$f(a) = f(0) = \mathrm{Cos}\, 0 + j_0 \,\mathrm{Sin}\, 0 = 1;$$

liegt dagegen c in b, so ist

$$f(b) = f(1) = \mathrm{Cos}\, 1 + j_0 \,\mathrm{Sin}\, 1 = j.$$

Mithin ist j der Verschiebungsfactor um die Länge a b, d. h. um die Längeneinheit.

Es ist daher für unsre Betrachtungsweise

$$u_a = u \,.\, f(a) = u \,.\, f(0) = u \,.\, 1 = u$$

eine Strecke im Punkte a, während

$$u_b = u \,.\, f(b) = u\, f(1) = u \,.\, j = j\, u$$

eine in b befindliche Strecke ist.

Während wir uns also hier jede Strecke, die mit 1 multiplicirt ist, d. h. jede Strecke ohne einen j enthaltenden Factor, in dem Punkte a angebracht denken müssen, so ist eine mit j multiplicirte im Punkte b zu denken, wenn wir a b als die Längeneinheit betrachten. Es wird daher nur eine weitere Folgerung hieraus sein, wenn wir

$$j^2 \,.\, u = j \,.\, (j\, u) = j \,.\, u_b$$

ansehen als eine Strecke, die wir erhalten, wenn wir u von dem Punkte a nach b und sodann nochmals um a b weiter, etwa nach b schieben, so dass a b = 2 . a b ist. Ebenso ist

$$j^n \,.\, u$$

eine zu ihrer Anfangslage in a parallele Strecke, die aber in einer Entfernung a p = n . a b auf der Geraden a b angebracht ist.

Da wir

$$j = \mathrm{Cos}\,1 + j\,\mathrm{Sin}\,1$$

setzen können, so ist

$$j^n = \mathrm{Cos}\,n + j\,\mathrm{Sin}\,n,$$

d. h. ein Factor, der um $n.ab$ auf der Richtung ab verschiebt, wobei nun n ganz oder gebrochen sein kann.

Auch ergiebt sich jetzt direct die Richtigkeit des Satzes, dass

$$(\mathrm{Cos}\,c + j\,\mathrm{Sin}\,c)^n = \mathrm{Cos}\,n\,c + j\,\mathrm{Sin}\,n\,c.$$

Die linke Seite ist nämlich ein Factor, der verlangt, man solle n mal um die Strecke ac verschieben in der Richtung ab. Die rechte Seite verlangt dagegen, dass man direct um n mal die Strecke ac verschiebe. Die Resultate beider Operationen sind aber identisch, mithin ist obige Gleichung richtig.

3. — Der Ausdruck

$$a + jb = (a + b)\,(\mathrm{Cos}\,c + j\,\mathrm{Sin}\,c)$$

lässt sich jetzt aber so auffassen. Es ist

$$a + jb$$

die Summe zweier parallelen Strecken, von denen die eine in a, die andere in b angebracht ist. Der Ausdruck

$$(a + b)\,(\mathrm{Cos}\,c + j\,\mathrm{Sin}\,c)$$

drückt dagegen die Strecke von der Länge

$$u = a + b$$

aus, befindlich im Punkte c. Wir kommen daher hier auf eine eigenthümliche Addition paralleler Strecken. Den Betrachtungen, wie sie von Möbius zuerst in die Geometrie eingeführt und von Hamilton in der ausgedehntesten Weise verwerthet wurden, über die geometrische Addition von einander schneidenden Strecken liegt folgender Satz zu Grunde. Die geometrische Summe zweier aufeinander folgender Seiten eines Dreiecks ist die dritte Seite, durchlaufen in der Richtung vom Anfang der ersten zum Endpunkt der zweiten Seite, ein Satz, der sich auch so aussprechen lässt: Die Summe zweier Seiten an einer Ecke eines Parallelogrammes, die ihren Anfang in dieser Ecke haben, ist gleich der dazwischen liegenden Diagonale. Von der Summation paralleler Strecken handelte man bis jetzt nicht ausführlich, da man für die meisten Untersuchungen damit ausreichte, parallele Strecken als identisch zu betrachten, wenn sie gleiche Länge hatten; über die Lage der Summe paralleler Strecken finden sich nirgends Andeutungen. Wir werden dagegen hier durch die longimetrisch complexen Ausdrücke dazu geführt, als Summe zweier parallelen Strecken a und b die dritte zu a und b parallele Strecke anzusehen, deren Anfang den Abstand der Anfänge von a und b im Verhältniss von b : a theilt, und deren Länge gleich der Summe der abso-

luten Längen von a und b ist. Diese Summationsmethode ist vollständig diejenige, welche als Gesetz für die Addition paralleler Kräfte gilt. Auch für die Subtraction einer Strecke von einer parallelen ergeben sich hieraus Verfahren, die ganz übereinstimmen mit der Methode der Addition entgegengesetzt paralleler Kräfte.

Aus

$$a + jb = u_c$$

folgt nämlich

$$u_c - a = jb,$$

d. h. als Unterschied paralleler Strecken müssen wir die dritte Strecke ansehen, deren Länge gleich der Differenz der absoluten Länge des Minuendus und der des Subtrahendus ist, und die den Abstand der Anfangspunkte der beiden Glieder des Unterschiedes im umgekehrten Verhältniss dieser Glieder äusserlich theilt. Dabei liegt diese Differenz auf der Seite des grösseren Gliedes, mit dem sie auch gleichstimmig parallel läuft.

Mit Benutzung dieser Sätze sieht man nun auch leicht, dass

$$2j - 1 = j^2$$

ist. Die linke Seite stellt zwei Strecken dar in b und a, erstere von der Länge 2, letztere von der Länge 1. Die Differenz ergiebt daher eine dritte Strecke von der Länge eins in einem Punkte, dessen Abstand von a gleich 2 a b ist. Die Richtigkeit von

$$j^2 u = (2j - 1)\, u$$

lässt sich nun auch leicht nachweisen.

4. — Man könnte versucht sein,

$$-j$$

als einen Factor zu betrachten, der in der Richtung b a um die Längeneinheit verschiebt. Dem ist jedoch nicht so. Es ist

$$-j$$

eine Länge (— 1) in dem Punkte b. Das Verschieben in der Richtung b a wird dagegen hervorgerufen durch Division mit j. Denn es ist

$$\frac{1}{j} = j^{-1} = (\mathrm{Cos}\, 1 + j\, \mathrm{Sin}\, 1)^{-1} = \mathrm{Cos}\,(-1) + j\, \mathrm{Sin}\,(-1),$$

d. h. ein Werth, der um die Längeneinheit von a aus nach links liegt oder verschiebt.

Man wird dieses Resultat auch ganz in Ordnung finden, wenn man bedenkt, dass Multiplication mit j um a b verschiebt, eine darauffolgende Division mit j dagegen die Strecke wieder in ihre alte Form resp. Lage führen muss, also um b a zurückschiebt.

Dass wir nach vorstehenden Erörterungen

$$j - 1$$

nun nicht mehr einfach gleich Null setzen dürfen, ist klar. Es ist diess

ja jetzt die Differenz gleicher Strecken von der Längeneinheit, die aber in b und a angebracht sind. Es bietet dieser Ausdruck einige Schwierigkeiten. Er stellt eine Strecke Null dar im Unendlichen auf der Richtung a b, kann also ganz gut als der Vertreter eines Punktes im Unendlichen gelten. Fasst man dagegen die in a und b auftretenden gleichen aber entgegengesetzten Strecken als Vertreter von Kräften oder Rotationen auf, so stellt j — 1 bezüglich ein Kräfte- oder ein Rotationspaar dar.

5. — Haben wir im Vorstehenden gesehen, wie u (Cos m + j Sin m) eine Strecke u bezeichnet, die einer gegebenen Richtung parallel geht und auf der durch a und b bestimmten Geraden im Punkte m ihren Anfang hat, so kann man

$$\text{Cos } m + j \text{ Sin } m$$

betrachten als eine solche Strecke von der Längeneinheit; man kann diesen Factor aber auch als Ausdruck für die Lage des Punktes m auffassen, und es repräsentirt dann jeder solche complexe Ausdruck eine Stelle der Mittellinie, wie die goniometrisch complexen Ausdrücke

$$\cos \varphi + i \sin \varphi$$

und

$$\text{Cos } \varphi + j_\lambda \text{ Sin } \varphi$$

eine durch den Schnittpunkt der Axen gehende Richtung darstellen. Es entsprechen so z. B. den Punkten a und b die Zahlen 1 und j.

Es ist ferner

$$^1/_2 + {}^1/_2 j$$

die Zahl für den Halbirungspunkt des Abstandes a b. Es ist ferner

$$1 - j$$

der im Unendlichen gelegene Punkt. Es sind

$$\text{Cos } m \pm j \text{ Sin } m$$

harmonisch zu a und b gelegene Punkte, während

$$\text{Sin } m \pm j \text{ Cos } m$$

die zu jenen in Bezug auf a und b symmetrisch gelegenen Punkte darstellen.

Negative Ausdrücke, wie

$$-\text{Cos } m - j \text{ Sin } m$$

müssen wir betrachten als

$$(-1)\ (\text{Cos } m + j \text{ Sin } m),$$

d. h. als Ausdrücke für eine negativ gerichtete Strecke von der Länge der Einheit, die ihren Anfang in m hat.

6. — Durch die vorstehenden Betrachtungen dürfte über den Werth und die Bedeutung von j hinreichend Aufschluss gegeben sein. Die Wichtigkeit der Sache mag es entschuldigen, wenn wir versuchen, diesen Translationsfactor j abzuleiten, ohne uns auf die Bedeutung goniometrisch complexer Ausdrücke zu stützen.

Hat eine Strecke u ihren Anfang in dem Punkte a der Mittellinie a b, so wollen wir dieselbe einfach mit u bezeichnen. Liegt dagegen ihr Anfangspunkt in dem Punkte c der Mittellinie, während die Richtung von u dieselbe geblieben ist, so wollen wir einmal annehmen, dass wir diese Lagenverschiedenheit ausdrücken könnten durch

$$u\,f(z),$$

wobei $z = a\,c$ ist. Obschon wir von der Form des $f(z)$ nichts im Voraus sagen können, müssen wir von seinem Werthe verlangen, dass er gleich 1 sei, da durch die Verschiebung des u nichts an seiner Grösse geändert wird. Der Winkel, den u mit der Richtung a b bildet, braucht in $f(z)$ nicht aufzutreten, da derselbe durch die Verschiebung nicht geändert werden soll.

Denken wir uns u von a aus nach c und dann von dort nach b (auf a b) geschoben, so dürfen wir, wenn $a\,c = z$, $c\,b = t$ gesetzt wird, annehmen, dass sich u in dieser neuen Lage ausdrücken lässt sowol durch

$$u\,f(z)\,.\,f(t)$$

als auch durch

$$u\,f(z + t),$$

dass daher

$$f(z)\,.\,f(t) = f(z + t)$$

sein muss.

Aus dieser Gleichung folgt, dass

$$f(z)\,.\,f(z) = f(z)^2 = f(2\,z)$$

ist, und allgemein, dass für ganze positive m

$$f(z)^m = f(m\,z)$$

ist. Für $z = 1$ wird dieser Ausdruck zu

$$f(m) = f(1)^m = C^m,$$

wenn wir $f(1)$ als eine Constante mit C bezeichnen. Ueber den Nachweis der Giltigkeit dieser Formel für beliebige m vergleiche man die Bemerkung in §. 12, 8. Es fehlt uns nun aber hier zur Ermittelung des Werthes von C ein schon im Voraus bekannter Verschiebungsfactor $f(m)$. Bei den goniometrischeu Functionen waren wir durch das Herkommen darauf vorbereitet, den Drehfactor

$$f(\pi) = -1$$

zu setzen, weil durch Drehen einer Strecke um 180°, sie in die negative Strecke verwandelt wird. Hier müssen wir zu einer Annahme unsre Zuflucht nehmen.

Da wir bei den jetzigen Untersuchungen über parallele Strecken nicht bloss deren Grösse, sondern auch ihre Stelle in Betracht ziehen, so muss ihrer Summe auch eine gewisse Stelle angewiesen werden, und zwar eine

Stelle, die weder die des einen noch die des anderen Summanden ist, wenn sich dieselben an verschiedenen Orten des Raumes befinden. Sind die zu addirenden Strecken nun an Länge einander gleich, so liegt es nahe, als Summe derselben die Strecke zu betrachten, welche gleich der doppelten Länge eines der Posten ist, und die vom Halbirungspunkte des Abstandes der Anfänge der Summanden parallel zu denselben gezogen ist. Es müsste also in der obigen Bezeichnungsweise sein

$$u\,f(z) + u\,f(t) = 2\,u\,f[{}^1/_2(z + t)],$$

wenn wir hier t ebenfalls den Abstand der zweiten Strecke von a sein lassen, oder es ist

$$f(z) + f(t) = 2\,f[{}^1/_2(z + t)].$$

Diese Gleichung wird durch Differentiation nach z zu

$$f'(z) = f'[{}^1/_2(z + t)],$$

und durch Differentiation nach u zu

$$f'(t) = f'[{}^1/_2(z + t)].$$

Hieraus folgt, dass

$$f'(z) = f'(t),$$

d. h. es ändert sich f'(z) nicht, wenn sich z ändert, es ist also f'(z) eine Constante k.

Aus

$$f'(z) = k$$

folgt aber

$$f(z) = k\,z + k_1.$$

Da aber $f(0) = 1$ ist, so muss $k_1 = 1$ sein. Setzen wir ferner

$$k = j - 1,$$

wo j bis jetzt uns noch unbekannt ist, so wird

$$f(z) = j\,z + (1-z).$$

Indem wir aber die Länge a b gleich der Längeneinheit annehmen, dürfen wir

$$z = \mathrm{Sin}\,c,$$
$$1 - z = \mathrm{Cos}\,c$$

setzen. Es wird dadurch

$$f(z) = \mathrm{Cos}\,z + j\,\mathrm{Sin}\,z = \mathrm{Cos}\,c + j\,\mathrm{Sin}\,c.$$

Nehmen wir die Strecke u im Punkte b an, so wird

$$u_b = f(1).u = u.(\mathrm{Cos}\,1 + j\,\mathrm{Sin}\,1) = u\,j.$$

Es ist mithin j ein Factor, welcher bewirkt, dass eine damit multiplicirte Strecke u um die Länge a b, d. h. um die Längeneinheit verschoben wird. Nach der gefundenen Bedeutung von j wird $u\,j^2$ eine Strecke sein, die um 2 a b von a absteht. Zufolge der gemachten Annahme über die Addition paralleler gleicher Strecken ist dann aber

$$u + j^2 u = j \,.\, 2u,$$

oder

$$1 + j^2 = 2j,$$

und damit sind wir wieder zu der von uns in §. 31, 1 gemachten Annahme

$$j^2 = 2j - 1$$

gekommen, mit deren Hilfe wir dort den Moivre'schen Satz für longimetrische Functionen bewiesen.

Die Gesetze über die Addition ungleicher paralleler Strecken ergeben sich jetzt wieder wie in (3) dieses Paragraphen.

7. — Wenn die Bedeutung des j einmal festgestellt ist als die eines Factors, welcher eine damit multiplicirte Strecke u um die Länge ab in eine parallele Lage verschiebt, und dass eine Verschiebung um ac ausgedrückt wird durch den der Strecke u beigegebenen Factor

$$\operatorname{Cos} c + j \operatorname{Sin} c,$$

so können wir diesen neuen Verschieber bezeichnen mit j_c, das alte j daher jetzt j_b nennen. Dann ist die Abhängigkeit dieser Factoren ausgedrückt durch

$$j_c = \operatorname{Cos} c + j_b \operatorname{Sin} c,$$

oder durch

$$j_b = \operatorname{Cos} b + j_c \operatorname{Sin} b,$$

wenn im ersten Falle ab als Basis für die longimetrischen Functionen gilt, im zweiten dagegen diese Functionen auf ac bezogen sind. Diese Formeln sind ganz analog den allgemeinen goniometrischen Formeln, wonach

$$j_\varphi = \operatorname{Cos} \varphi + j_\lambda \operatorname{Sin} \varphi$$

und

$$j_\lambda = \operatorname{Cos} \lambda + j_\varphi \operatorname{Sin} \lambda$$

ist. Die Herleitung erfolgt so. Da

$$j_c = \operatorname{Cos} c + j_b \operatorname{Sin} c = \left(\frac{cb}{ab} + j_b \frac{ac}{ab} \right)$$

ist, so haben wir

$$ab \,.\, j_c = cb + j_b \, ac,$$

mithin

$$\begin{aligned} j_b &= -\frac{cb}{ac} + \frac{ab}{ac} j_c, \\ &= \frac{bc}{ac} + j_c \frac{ab}{ac}, \\ &= \operatorname{Cos} b + j_c \operatorname{Sin} b, \end{aligned}$$

wenn wir in der letzten Gleichung die longimetrischen Functionen auf ac als Basis beziehen.

Als abgekürzte Bezeichnung für complexe reducirte Ausdrücke könnte man mit Hamilton einführen

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{cis}\,\varphi,$$

daher für allgemeine goniometrische Complexen

$${}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{j}_{\lambda}\,{}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{C}\mathrm{j}_{\lambda}\mathrm{S}\,\varphi = {}^{\lambda}\mathrm{C}\,\mathrm{j}\,\mathrm{S}\,\varphi;$$

und für longimetrische Complexen könnte man setzen

$$\mathrm{Cos}\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{m} = \mathrm{C}\,\mathrm{j}_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{S}\,\mathfrak{m}.$$

Hier tritt zum ersten Mal die Nothwendigkeit heran, statt $\mathrm{j}_{\mathfrak{b}}$ vielleicht $\mathrm{j}_{\mathfrak{b}}$ zu schreiben, wenn wir mit b den Abstand des Punktes $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ bezeichnen. Dabei bedeutet b nicht bloss die Länge b, sondern zugleich diese Länge nebst deren Richtung. Dann ist j_{φ} ein Drehfactor um den Winkel φ, $\mathrm{j}_{\mathfrak{b}}$ ein Verschiebungsfactor in der Richtung und um die Länge $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$. Hamilton selbst bezeichnet Strecken, wenn ihre Länge und Richtung berücksichtigt wird, mit griechischen Buchstaben. Unter dieser Annahme würde dann

$$\mathrm{j}_{\alpha}$$

bald ein Drehfactor um den Winkel α, bald ein Verschiebungsfactor um die Länge und in der Richtung des Vectors α sein.

Ist für longimetrische Functionen die Richtung der Verschiebung eine bekannte und die Länge des Fundamentalabstandes $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ etwa gleich der Längeneinheit, so kann man eine Verschiebung um $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ einfach ausdrücken durch

$$\cos\mathfrak{m} + \mathrm{j}\sin\mathfrak{m} = \mathrm{cjs}\,\mathfrak{m},$$

welches dann dem für goniometrische complexe Ausdrücke mit gemeinen goniometrischen Functionen giltigen

$$\mathrm{cis}\,\varphi$$

entspräche, indem man für diesen Fall die longimetrischen Functionen auch mit kleinen Anfangsbuchstaben schriebe.

Der Nachweis aber, dass sowol i wie j eine reelle geometrische Bedeutung haben, dass beide nämlich durch Strecken dargestellt werden können, muss bis zum zweiten Theile der gegenwärtigen Untersuchungen ausgesetzt bleiben.

8. — Im Vorstehenden ist eine grosse Analogie zwischen allgemeinen goniometrischen Complexen und den longimetrisch complexen Ausdrücken nachgewiesen worden. Es bleibt noch eine Lücke. Die allgemeine Moivre'sche Formel

$$(\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{j}_{\lambda}\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{Cos}\,\frac{2\,\mathrm{k}\,\pi + \varphi}{\mathrm{n}} + \mathrm{j}_{\lambda}\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\,\mathrm{k}\,\pi + \varphi}{\mathrm{n}}$$

ergiebt als Resultat der Radicirung n verschiedene Werthe, wenn n eine ganze positive Zahl ist, Werthe, die man erhält, indem man k die Reihe

der ganzen Zahlen durchlaufen lässt. Man kann nach dem entsprechenden Satze für longimetrische Functionen fragen. Derselbe fehlt, und zwar aus folgenden Gründen.

Der Eigenthümlichkeit eines Winkels, wonach die Schenkel von φ auch zugleich die Schenkel von $2\pi + \varphi$, $4\pi + \varphi$ etc. sind (vergl. §. 12, 10), giebt es für eine Strecke a b nichts Entsprechendes, man müsste denn diese Strecke als Stück eines Kreises mit unendlichem Radius auffassen. Dann gehörten allerdings zu a b zwei Halbirungspunkte, m und m_1, von denen der letztere aber im Unendlichen läge. Dass eine Dreitheilung der Strecke a b zu drei Punkten führt und eine Theilung der Strecke a b in n gleiche Theile, n verschiedene Endpunkte des ersten Stückes ergiebt, von denen aber n—1 im Unendlichen liegen, lässt sich folgendermassen zeigen.

In (6) dieses Paragraphen haben wir den Verschiebungsfactor f(z) ermittelt, mittelst der Gleichung

$$f(z) \,.\, f(t) = f(z + t)$$

und gefunden, dass

$$f(z) = C^z$$

ist. Gesetzt wir wollten mit Hilfe dieser Gleichung den Punkt ermitteln, welcher den Abstand a b halbirt. Dann hätten wir, wenn wir den Abstand des Halbirungspunktes von a mit z, dagegen a b mit 1 bezeichnen,

$$C^z \,.\, C^z = C^{2z} = C^1,$$

oder

$$C^z = \pm C^{\frac{1}{2}},$$

und

$$z \log C = \log (\pm C^{\frac{1}{2}}),$$

also

$$z_1 = \frac{\log (+ C^{\frac{1}{2}})}{\log C} = {}^1/_2;$$

$$z_2 = \frac{\log (- C^{\frac{1}{2}})}{\log C} = \frac{\log C^{\frac{1}{2}} + \log (-1)}{\log C}$$

$$= {}^1/_2 + \frac{\log (-1)}{\log C} = {}^1/_2 + \frac{l(-1)}{l C}.$$

Da wir nun gefunden haben

$$C = j = (-1)^0,$$

so erhalten wir für

$$z_2 = {}^1/_2 + \frac{l(-1)}{l(-1)^0} = {}^1/_2 + \frac{1}{0} = \infty,$$

d. h. der zweite Halbirungspunkt liegt im Unendlichen.

Soll a b in drei gleiche Theile getheilt werden, und nennen wir wieder z den Abstand des ersten Theilpunktes von a, so ist

$$(C^z)^3 = C^{3z} = C^1,$$

mithin

$$C^z = \sqrt[3]{C} = \sqrt[3]{C}\,\sqrt[3]{1},$$

$$z = \frac{{}^1/_3 \log C + \log \sqrt[3]{1}}{\log C}$$

$$= {}^1/_3 + \frac{\log \sqrt[3]{1}}{\log C}.$$

Da die $\sqrt[3]{1}$ drei Werthe hat, so wird auch z dreiwerthig, und zwar

$${}^1/_3 + {}^c\log (-1)^{\frac{2k}{3}},$$

wenn wir k der Reihe nach 0, 1, 2 und allgemein

$$\frac{\log x}{\log C} = {}^c\log x$$

setzen. Hiervon werden aber die beiden letzten Werthe unendlich für

$$C = j_0 = (-1)^0.$$

Soll allgemein a b in n gleiche Theile getheilt werden, und ist z gleich dem Abstand des ersten Theilpunktes von a, so haben wir

$$(C^z)^n = C^{nz} = C^1,$$

mithin

$$C^z = \sqrt[n]{C},$$

und

$$z = \frac{1}{n} + {}^c\log\left(1^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} + {}^c\log\,(-1)^{\frac{2k}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} + {}^c\log\left(\mathrm{Cos}\,\frac{2k\pi}{n} + j_\lambda \mathrm{Sin}\,\frac{2k\pi}{n}\right),$$

worin für k alle ganzen Zahlen zulässig sind. Für $C = j_0 = (-1)^0$ werden aber von diesen n Werthen des z deren $n-1$ unendlich.

§. 35. Ueber die Verwendbarkeit longimetrisch complexer Ausdrücke in der Geometrie und der Mechanik.

1. — Man kann dem complexen Ausdruck

$$u = x + j_\lambda y,$$

oder

$$u = \varrho\,(\mathrm{Cos}\,\varphi + j_\lambda \mathrm{Sin}\,\varphi)$$

drei verschiedene Bedeutungen beilegen. Es stellt derselbe dar

1) den Punkt mit den cartesischen Coordinaten x und y, die den Coordinatenwinkel λ miteinander bilden; derselbe Punkt kann auch durch die Polarcoordinaten ϱ und φ bestimmt gedacht werden;

2) oder man kann sich u als den Vector denken, der die Länge $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\,{}^\lambda\mathrm{Cos}\,\varphi}$ hat, und der unter dem Winkel φ gegen eine feste Richtung geneigt ist; oder es stellt

3) u die unbegrenzte Gerade dar, welche auf den Axen mit dem Winkel λ die Stücke x und y abschneidet, eine Gerade, als deren Coordinaten man $\xi = \frac{1}{x}$ und $\eta = \frac{1}{y}$ bezeichnet hat.

Besteht nun für x und y in

$$u = x + j_\lambda y$$

eine Beziehung etwa so, dass beide als Functionen von t auftreten, so geben die verschiedenen u eine Folge der so dargestellten Elementargebilde, d. h. von Punkten oder Geraden, deren Gesammtheit bei continuirlich sich änderndem t zu einer Punktcurve oder zu einer Umhüllungscurve führt.

Die Untersuchung dieser Curve kann dann mit Benutzung von u geführt werden. Stellt hierbei t die Zeit dar, so kann man die Bewegung des Punktes oder der Geraden untersuchen, durch deren Ortsveränderung die Curve beschrieben, beziehungsweise umhüllt wird.

2. — Ganz analog zu dem eben Vorgeführten kann man

$$u = x + j_0 y = w(\mathrm{Cos}\, m + j_0 \mathrm{Sin}\, m)$$

auf dreifache Art eine geometrische Bedeutung geben. Es stellt jetzt u dar entweder

1) den Punkt m, der um

$$w = x + y$$

von der Mittellinie eines Axensystems mit parallelen Axen (vergl. §. 19, 2) absteht, und der zugleich den Abstand der Axen so theilt, dass

$$\mathrm{Tang}\, m = \frac{y}{x}.$$

Der Abstand w des Punktes ist bei schiefer Stellung der Axen zur Mittellinie parallel zu diesen Axen anzunehmen. Dabei könnte man x und y als Coordinaten des Punktes m betrachten, ebenso w und etwa Tang m als eine Art Polarcoordinaten dieses Punktes (vergl. §. 19, 1); oder es stellt

2) u die in (1) bezeichnete Strecke w dar, welche parallel zu den Axen von dem Punkt der Mittellinie aus abgetragen ist, für welchen $\mathrm{Tang}\, m = \frac{y}{x}$ ist; oder es ist endlich

3) u die unbegrenzte Gerade deren Coordinaten auf einem parallelaxigen Coordinatensystem $x = w\,\mathrm{Cos}\, m$ und $y = w\,\mathrm{Sin}\, m$ sind. In allen drei Fällen stellt j_0 den Verschiebungsfactor für den Abstand der parallelen Axen dar, d. h., wie wir später sehen werden, diesen Abstand selbst, nach Grösse und Richtung.

Besteht nun wieder eine Beziehung zwischen x und y, indem beide z. B. Functionen von t sind, so lassen sich auch hier ganz ähnliche Untersuchungen anstellen, wie die gegen Ende von (1) dieses §. angedeuteten in Bezug auf

$$u = x + j_\lambda y.$$

3. — Eigenthümlich und mit dem dualen Charakter dieser beiden Arten complexer Ausdrücke zusammenhängend ist es, dass die Untersuchung am einfachsten wird, wenn man

$$x + j_\lambda y$$

als den Vertreter eines Punktes,

$$x + j_0 y$$

dagegen als Ausdruck für eine unbegrenzte Gerade auffasst. Die Gleichungen der Punktcurven für den ersten Fall und der Umhüllenden für den zweiten Fall werden dann nämlich einfacher, als wenn man etwa $x + j_\lambda y$ eine Gerade und $x + j_0 y$ einen Punkt darstellen lässt und dabei x und y als die Coordinaten dieser Elemente einführt. Während nämlich für die erste Auffassung die Gleichung der Geraden, resp. des Punktes vom ersten Grade wird, wird dieselbe für die zweite Annahme vom zweiten Grad. (Vergl. §. 19, 2).

4. — Für die durch die complexen Ausdrücke dargestellten Strecken ergiebt sich eine Art Dualismus dadurch, dass die Vectoren

$$x + j_\lambda y$$

alle durch einen festen Punkt, oder von demselben ausgehen, während die Strecken

$$x + j_0 y$$

alle einer gegebenen Richtung parallel laufen oder von einer gegebenen Richtung sind.

Mit den bisherigen Mitteln ist es daher genau genommen noch nicht möglich, eine beliebige Strecke in einer bestimmten Lage in der Ebene x y auszudrücken. Die herkömmlichen complexen Ausdrücke scheinen diess zwar zu thun; es gelingt diess aber nur unter der Voraussetzung, dass parallele Strecken von gleicher Länge identisch seien, eine Annahme, die, wie wir noch sehen werden, nicht immer zulässig ist.

Dagegen vermögen wir schon jetzt, durch eine Verbindung goniometrischer und longimetrischer complexer Ausdrücke jede Strecke von beliebiger Richtung darzustellen, wenn dieselbe nur ihren Anfang auf der Geraden a b hat, welche durch unsre Fundamentalpunkte a und b geht, und in der durch die parallelen Axen der x und y bestimmten Ebene liegt.

Die Strecke m, die in unsrer Coordinatenebene in dem Punkte m der Mittellinie ihren Anfang hat und den Axen parallel läuft, ist nach den obigen Betrachtungen nämlich darstellbar durch

$$m\ (\mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_0\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m}).$$

Um aber auch sichtbar zu machen, dass m unter einem Winkel μ gegen die Mittellinie geneigt ist, braucht man nur m zu ersetzen durch

$$m\ (\mathrm{Cos}\ \mu + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\ \mu),$$

oder kürzer durch

$$m\ .\ C\, j_\lambda S\, \mu.$$

Dadurch erhalten wir

$$m\ .\ (\mathrm{Cos}\ \mu + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\ \mu)\ (\mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_0\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m})$$

als bicomplexen Ausdruck für die Strecke m, welche im Punkte $\mathfrak{m}$ unter dem Winkel μ gegen die Fundamentalrichtung $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ geneigt ist. Kürzer könnten wir dieses Product bezeichnen durch

$$m\ .\ (C\, j_\lambda S\, \mu)\ (C\, j_0 S\, \mathfrak{m}).$$

Eine kleine Aenderung in der vorstehenden Betrachtungsweise hätte uns für dieselbe Strecke den Ausdruck

$$m\ .\ (\mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_0\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m})\ (\mathrm{Cos}\ \mu + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\ \mu)$$

ergeben, woraus hervorgeht, dass die Factoren $\mathrm{Cos}\ \mu + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\ \mu$ und $\mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_0\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m}$ vertauschbar sind, oder dass für dieselben das commutative Princip gilt. Man überzeugt sich hiervon aber auch leicht direct. Es stellt ja

$$m\ .\ (\mathrm{Cos}\ \mu + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\ \mu)$$

eigentlich zwei unter dem Winkel λ gegen einander geneigte Strecken dar im Punkte $\mathfrak{a}$, von den Längen $m\ {}^{\lambda}\mathrm{Cos}\ \mu$ und $m\ {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\ \mu$. Durch Multiplication dieser Strecken mit $\mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_0\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m}$ werden beide parallel zu sich nach dem Punkte $\mathfrak{m}$ geschoben und ergeben dort durch ihre Summirung die Strecke m an der Stelle $\mathfrak{m}$ und in der Richtung μ gegen die Mittellinie geneigt, wenn man noch annimmt, dass $m\ \mathrm{Cos}\ \mu$ in die Richtung der Mittellinie fällt.

Umgekehrt stellt

$$m\ .\ (\mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_0\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m})$$

zwei parallele Strecken von noch unbestimmter Richtung in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und von der Grösse $m\ \mathrm{Cos}\ \mathfrak{m}$ und $m\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m}$ dar. Durch Multiplication dieser Strecken mit

$$\mathrm{Cos}\ \mu + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\ \mu$$

werden diese aber in die Richtung μ gedreht und ergeben nun durch Addition die Strecke m nach Grösse, Richtung und an dem Punkte $\mathfrak{m}$.

5. — Multiplicirt man

$$m\ (\mathrm{Cos}\ \mu + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\ \mu)\ (\mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_0\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m})$$

aus, so erhält man

$$m\ (\mathrm{Cos}\ \mu\ .\ \mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_\lambda\ \mathrm{Sin}\ \mu\ .\ \mathrm{Cos}\ \mathfrak{m} + j_0\ \mathrm{Cos}\ \mu\ .\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m} + j_\lambda\, j_0\ \mathrm{Sin}\ \mu\ .\ \mathrm{Sin}\ \mathfrak{m}).$$

Von den vier Gliedern dieses Aggregates haben die beiden ersten ihren Anfang in a; während wir aber das erste in die Richtung a b fallend denken, bildet das zweite mit dieser Richtung den Winkel λ. Das dritte und vierte Glied haben ihren Anfang in b; von ihren Richtungen gilt dagegen dasselbe wie bei den zwei ersten Strecken. Die Addition dieser Strecken nach dem Gesetze über die Zusammensetzung schneidender Vectoren ergiebt in a und b zwei parallele Strecken. Setzt man diese nach dem Princip über die Addition paralleler Strecken zusammen, so erhält man in der That die Strecke m, die ihren Anfang im Punkte m der Mittellinie hat und mit dieser den Winkel μ bildet. Da diese Multiplication eines goniometrisch complexen Ausdrucks mit einer longimetrisch Complexen gerade so geschah, wie bei reellen algebraischen Summen, so folgt, dass das distributive Princip für die Multiplication longimetrisch und goniometrisch complexer Ausdrücke anwendbar ist.

6. — Das Product aus einer goniometrischen und einer longimetrischen Complexen ist ein viergliedriger Ausdruck, der allgemein die Form

$$A + j_\lambda B + j_0 C + j_\lambda j_0 D$$

hat. Er stellt eine neue Art complexer Zahlen dar, die man gemischte Quaternionen nennen könnte. Wie wir später sehen werden, ist diess nur ein besonderer Fall der allgemeineren Producte, die wir als Biquaternionen kennen lernen werden.

Mit diesen gemischten Quaternionen lassen sich die Grundrechnungsarten vornehmen wie mit anderen complexen Zahlen, indem man j_0 und j_λ als Factoren ansieht, mit denen gerechnet wird wie mit reellen Zahlen, deren Potenzen aber immer wieder auf Ausdrücke von der nullten oder ersten Potenz von j_0 und j_λ zurückführbar sind mittelst der bekannten und vielfach von uns benutzten Formeln.

Man kann umgekehrt eine gemischte Quaternion

$$A + j_\lambda B + j_0 C + j_\lambda j_0 D$$

auf den reducirten Ausdruck

$$m (\mathrm{Cos}\,\mu + j_\lambda \mathrm{Sin}\,\mu)(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{m} + j_0 \mathrm{Sin}\,\mathfrak{m})$$

zurückzuführen versuchen. Zu diesem Zwecke wird man setzen

$$\begin{aligned} A &= m \mathrm{Cos}\,\mu \mathrm{Cos}\,\mathfrak{m}, \\ B &= m \mathrm{Sin}\,\mu \mathrm{Cos}\,\mathfrak{m}, \\ C &= m \mathrm{Cos}\,\mu \mathrm{Sin}\,\mathfrak{m}, \\ D &= m \mathrm{Sin}\,\mu \mathrm{Sin}\,\mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\mathrm{Tang}\,\mu = \frac{B}{A} = \frac{D}{C},$$

$$\text{Tang } m = \frac{C}{A} = \frac{D}{B},$$

$$m = \frac{A+C}{\text{Cos } \mu} = \frac{B+D}{\text{Sin } \mu}.$$

Zugleich sieht man, dass die Möglichkeit der Rückführung einer gemischten Quaternion auf die Normalform

$$m \,.\, C j_\lambda S \mu \,.\, C j_0 S m$$

geknüpft ist an die Bedingungsgleichung

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Die übrigen aus den zwei letzten Gleichungen sich scheinbar noch ergebenden Bedingungen sind, wie man sich durch Vertauschen der Glieder oder durch Einführung der Werthe für Cos μ und Sin μ überzeugen kann, erfüllt wenn

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

ist.

Die reducirte Form gemischter Quaternionen ist besonders geeignet, die Resultate der Multiplication und Division solcher bicomplexen Ausdrücke leicht anzugeben. So ist, wenn

$$q_1 = m_1 \,.\, C j_\lambda S \mu \,.\, C j_0 S m,$$
$$q_2 = m_2 \,.\, C j_\lambda S \nu \,.\, C j_0 S n$$

ist, das Product

$$q_1 q_2 = m_1 m_2 \,.\, C j_\lambda S (\mu + \nu) \,.\, C j_0 S (m + n)$$

und der Quotient

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1}{m_2} \,.\, C j_\lambda S (\mu - \nu) \,.\, C j_0 S (m - n).$$

Zur Gleichheit zweier Bicomplexen

$$A_1 + j_\lambda B_1 + j_0 C_1 + j_\lambda j_0 D_1 = A_2 + j_\lambda B_2 + j_0 C_2 + j_\lambda j_0 D_2$$

gehören die vier Gleichungen

$$A_1 = A_2,\ B_1 = B_2,\ C_1 = C_2,\ D_1 = D_2.$$

Denn nur unter Voraussetzung dieser vier Bedingungsgleichungen führen die vorstehenden Bicomplexen zu Strecken von derselben Länge, derselben Stelle und derselben Richtung, falls dieselben überhaupt durch eine Strecke darstellbar sind.

Gilt nämlich für

$$q = A + j_\lambda B + j_0 C + j_\lambda j_0 D$$

nicht die Bedingung

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

so stellt q nicht mehr eine Strecke dar, die ihren Anfang in einem Punkte

der Mittellinie hat, sondern es ist jetzt q der Ausdruck für zwei in a und b angebrachte Strecken, die aber nicht parallel sind.

Setzt man

$$q' = A + j_\lambda B,$$
$$q'' = C + j_\lambda D,$$

so sind q' und q'' die zwei in a und b anfangenden unparallelen Strecken. Wollte man versuchen dieselben an ihren Durchschnitt zu verlegen und dort zu addiren, wie man diess bei Kräften thut, so kämen wir zu folgendem Widerspruch. Die so erhaltene Summe $q' + q'' = s$ liesse sich an den Punkt c von a b verlegen, wo ihre Richtung die Mittellinie trifft. Die Strecke s_c ergäbe aber wieder die zwei parallelen Componenten s_1 und s_2 in a und b, und wir hätten so die nicht parallelen Strecken q' und q'' ersetzt durch die parallelen s_1 und s_2, was nicht zulässig scheint.

Es liesse sich der Ausdruck

$$A + j_\lambda B + j_0 C + j_\lambda j_0 D,$$

worin $\frac{A}{B}$ nicht gleich $\frac{C}{D}$ ist, verwandeln in einen solchen, für den diese Bedingung gilt, durch Hinzufügung von

$$M(1 - j_0),$$

worin M noch unbestimmt ist. Bestimmen wir nun M so, dass

$$\frac{M + A}{B} = \frac{C - M}{D},$$

d. h. dass

$$M = \frac{BC - AD}{B + D}$$

ist, so ist

$$A + M + j_\lambda B + j_0 (C - M) + j_\lambda j_0 D$$

eine reducirbare Quaternion.

Die Hinzufügung von

$$M(1 - j_0)$$

ist bei Kräften dann gestattet, wenn $M(1 - j_0)$ zwei gleiche und in der Richtung a b einander entgegengesetzte Kräfte darstellt, die einander aufheben. Hier aber, wo es sich allgemein um Strecken handelt, ist diese Hinzufügung von $M(1 - j_0)$ nicht ohne Weiteres erlaubt. Sind die vorkommenden Grössen z. B. Rotationen, so ist $M(1 - j_0)$ eine Translation, die man nicht ohne Störung zu einem vorhandenen System von Rotationen hinzufügen darf. (Vergl. §. 39, 3 und §. 42, 2.)

7. — Eine ganz directe Verwendung gestatten die complexen longimetrischen Ausdrücke zur Darstellung von Kräften und Rotationsbewegungen.

Befinden sich in den Punkten a und b zwei parallele Kräfte oder zwei Rotationsbewegungen um parallele Axen (den Parallelismus der Richtungen, der Kräfte oder der Rotationsaxen setzen wir im Folgenden immer voraus), so setzen sich die gegebenen Stücke in eine resultirende Kraft oder Bewegung zusammen. Der Angriffspunkt der Kraft theilt den Abstand a b im umgekehrten Verhältniss der Kräfte, während die Resultante selbst gleich der Summe der Kräfte ist. Aehnliches gilt von den Rotationsgeschwindigkeiten. Umgekehrt lässt sich jede Kraft P oder eine Rotation von der Geschwindigkeit w zerlegen in zwei parallele Kräfte P_1 und P_2, resp. in zwei Rotationen um parallele Axen mit den Geschwindigkeiten w_1 und w_2, und zwar ist, wenn die neuen Angriffspunkte a und b sind

$$P_1 = P \operatorname{Cos} \mathfrak{m}, \quad P_2 = P \operatorname{Sin} \mathfrak{m},$$

und

$$w_1 = w \operatorname{Cos} \mathfrak{m}, \quad w_2 = w \operatorname{Sin} \mathfrak{m}.$$

Es ist also eine Kraft oder Rotationsgeschwindigkeit in $\mathfrak{m}$ ausdrückbar durch

$$P_{\mathfrak{m}} = P (\operatorname{Cos} \mathfrak{m} + j \operatorname{Sin} \mathfrak{m}),$$
$$w_{\mathfrak{m}} = w (\operatorname{Cos} \mathfrak{m} + j \operatorname{Sin} \mathfrak{m}),$$

wobei wir, da kein Missverständniss möglich, j statt j_0 setzen.

Es bedeutet mithin jetzt allgemein

$$C (\operatorname{Cos} \mathfrak{m} + j \operatorname{Sin} \mathfrak{m})$$

entweder eine Kraft von der Grösse C in dem Punkte $\mathfrak{m}$ angebracht oder zwei parallele Kräfte C cos $\mathfrak{m}$ und C sin $\mathfrak{m}$ mit den Punkten a und b als Angriffspunkten. In derselben Weise lässt sich ein solcher Ausdruck als eine resp. zwei Rotationen mit den Geschwindigkeiten C resp. C cos $\mathfrak{m}$ und C sin $\mathfrak{m}$ auffassen.

Die Multiplication einer Kraft oder Rotationsgeschwindigkeit mit j bedeutet also das Verschieben ihrer Richtung resp. der Rotationsaxe in eine parallele Lage im Abstand a b. Hieraus folgt auch leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$j^2 = 2j - 1.$$

Denn $w j^2 = w j j$ bedeutet eine Rotation w in der Entfernung $2 \cdot a b$, während $w (2j - 1) = 2 w j - w$ eine Rotation von der Geschwindigkeit $+ 2w$ in b, und eine Rotation von der Geschwindigkeit $- w$ in a um parallele Axen angiebt. Die Resultante dieser zwei Rotationen ist aber eine Rotation von der Geschwindigkeit w in der Entfernung 2 a b. Aus $w j^2 = w (2j - 1)$ folgt aber obige Grundgleichung.

Es bedeutet also in $P (\operatorname{Cos} \mathfrak{m} + j \operatorname{Sin} \mathfrak{m})$ oder in $w (\operatorname{Cos} \mathfrak{m} + j \operatorname{Sin} \mathfrak{m})$ der Factor $\operatorname{Cos} \mathfrak{m} + j \operatorname{Sin} \mathfrak{m}$ gerade so einen Coefficienten, der die Stelle auf a b anzeigt, wo der Angriffspunkt von P zu denken ist, wie in

$$P (\operatorname{Cos} \varphi + j_\lambda \operatorname{Sin} \varphi)$$

der Coefficient an P der Richtungscoefficient der Kraft B in Bezug auf zwei in ihrem Angriffspunkt einander schneidende Axen ist.

Aus dieser Bedeutung der Ausdrücke von der Form

$$P(\mathrm{Cos}\, m + j\, \mathrm{Sin}\, m)$$

ersieht man nun auch leicht, warum aus Gleichungen von der Form

$$A + jB = C + jD$$

folgen muss, dass

$$A = C \text{ und } B = D.$$

Denn $A + jB$ stellt eine Kraft dar mit den parallelen Componenten A und B in a und b, während

$$C + jD$$

eine Kraft mit den parallelen Componenten C und D in a und b ist. Die Resultirenden dieser Kräfte sind aber nur gleich und befinden sich an derselben Stelle, wenn

$$A = C \text{ und } B = D$$

ist.

8. — Wie sehr sich die complexen longimetrischen Ausdrücke zur Verwendung in den Elementen der Mechanik eignen, scheint auch aus Folgendem hervorzugehen.

Es ist die Rotationsgeschwindigkeit w im Punkte m dargestellt durch

$$w(\mathrm{Cos}\, m + j\, \mathrm{Sin}\, m).$$

Dieser Ausdruck lässt sich auch schreiben

$$w(1 - \mathrm{Sin}\, m + j\, \mathrm{Sin}\, m)$$

oder

$$w[1 + (j - 1)\, \mathrm{Sin}\, m] = w(1 + j'\, \mathrm{Sin}\, m),$$

wenn wir $j - 1 = j'$ setzen. Soll dieser Werth noch dasselbe bedeuten wie der oben stehende complexe Ausdruck, so muss $j'\, w\, \mathrm{Sin}\, m$ eine Rotation im positiven Sinne um den nach b hin unendlich fernen Punkt bedeuten, d. h. eine Translation mit der Geschwindigkeit $w.\mathrm{Sin}\, m$, indem nur diese Translation im Verein mit der Rotation w um a die Rotation w in m ergiebt.

Es liesse sich auch schreiben

$$w(\mathrm{Cos}\, m + j\, \mathrm{Sin}\, m) = w[\mathrm{Cos}\, m + j(1 - \mathrm{Cos}\, m)]$$
$$= w[(1-j)\, \mathrm{Cos}\, m + j] = w(j - j'\, \mathrm{Cos}\, m).$$

Dieser letzte Ausdruck stellt eine Rotation w um die durch b gehende Axe dar, und eine Rotation um die nach a hin im Unendlichen gelegene Axe, d. h. eine Translation mit der Geschwindigkeit $-w\, \mathrm{Cos}\, m$. Beide setzen sich auch in die ursprüngliche Rotation um m zusammen. Bezeichnet also w eine Rotationsgeschwindigkeit, so ist $\pm w(1 - j)$ ein

Rotationspaar, d. h. eine Translationsgeschwindigkeit von der Grösse w. Ebenso lässt sich zeigen, dass wenn P eine Kraft ist, dann

$$\pm P(1 - j)$$

ein Kräftepaar, d. h. ein mechanisches Element darstellt, welches eine Rotation erzeugt.

§. 36. Longimetrische Functionen der Punkte der Kreis- und Schraubenlinie.

1. — Nehmen wir auf einer Kreislinie, deren Radius gleich der Längeneinheit sein mag, zwei Punkte a und b an, theilen den dazwischen gelegenen Bogen durch den Punkt c in die Stücke a c und c b, so ist auch hier

$$a c + c b = a b.$$

Setzen wir dabei voraus, dass die Richtung von a nach b die positive Bewegungsrichtung sei, so bleibt diese Gleichung auch richtig für Punkte, die ausserhalb a b auf dem Ergänzungsbogen b a liegen, wenn nur die Zeichen der Theilstücke berücksichtigt werden. Dann können wir die Quotienten

$$\frac{a c}{a b}, \quad \frac{c b}{a b}, \quad \frac{a c}{c b}$$

auch hier als Sinus, Cosinus und Tangente des Bogens a c in Bezug auf den Bogen a b als Basis bezeichnen. Da wir aber bei Ableitung der Sätze über die longimetrischen Funktionen (§§. 15, 16) nirgends davon Gebrauch gemacht haben, dass die Punkte a, b, c in einer Geraden gelegen seien, so gelten die dort entwickelten Gesetze auch für diese neuen Quotienten. Eigenthümlich ist nur hier, dass derselbe Punkt c verschiedene Werthe seiner longimetrischen Functionen ergiebt, je nachdem man den Bogenabstand des Punktes c von a annimmt als gleich

$$a c, \quad 2\pi + a c, \quad 4\pi + a c \quad \text{etc.},$$

welches ja nach der Natur der Kreislinie gestattet ist.

Während für goniometrische Beziehungen jeder Bogen a c nur eine Winkelfunction jeder Art hat, alle Bögen aber, die um das Vielfache von 2π verschieden sind, dieselbe Function ergeben, so hat bei den longimetrischen Functionen von Bogen jede Function nur einen ihr entsprechenden Bogen resp. Punkt, es können aber unendlich viele longimetrische Bogen-Functionen zu demselben Punkte c führen. Ist nämlich z. B. der kürzeste Abstand $a c : a b = k$, so führen zu demselbeu Punkte c alle die Sinusse, deren Werth

$$k \pm \frac{2\pi}{a b}, \quad k \pm \frac{4\pi}{a b}, \ldots, k \pm \frac{2 n \pi}{a b}$$

beträgt.

2. — Auch die Formeln für die Rechnung mit complexen Ausdrücken wie

$$\mathrm{Cos}\, m + j \,\mathrm{Sin}\, m$$

behalten hier ihre Richtigkeit, nur muss man zwei Punkte m und m_1, die zwar zusammen fallen, für welche aber

$$a\, m_1 = 2\, n\, \pi + a\, m$$

ist, nicht als identisch betrachten, indem der eine nur durch eine Bewegung um $a\, m$, der andre durch ein Fortschreiten um die Länge $a\, m + 2\, n\, \pi$ erreicht wird, wo n alle positiven oder negativen ganzen Zahlen bedeuten kann.

Denkt man sich die complexe Bogenfunction

$$\mathrm{Cos}\, m + j \,\mathrm{Sin}\, m$$

multiplicirt mit einem Factor

$$u = F(a\, m),$$

so sieht man, wie

$$u\,(\mathrm{Cos}\, m + j \,\mathrm{Sin}\, m)$$

nun als Repräsentant von Punkten dienen kann, die auf Cylinderflächen liegen, deren Seiten der constanten Richtung von u parallel gehen, wenn wir die u selbst als Vectoren betrachten, die von den Punkten m aus in einer gegebenen Richtung angetragen sind. Sobald die Richtung von u in die Ebene des Grundkreises fällt, wird die Cylinderkurve zu einer ebenen Figur.

3. — Die vorstehenden Betrachtungen behalten schliesslich auch grösstentheils ihre Giltigkeit, wenn c ein Punkt einer Schraubenlinie ist, der den Schraubenbogen zwischen den Punkten a und b in die Stücke $a\, c$ und $c\, b$ theilt. Dadurch werden unsre longimetrisch complexen Ausdrücke direct zu Symbolen der Punkte einer Schraubenlinie, oder zu denen der Punkte von Curven, die sich finden, wenn man das eben erwähnte u von den Punkten der Schraubenlinie, welche als Basis dient, in einer gegebenen Richtung abträgt.

4. — Zieht man endlich von einem willkürlich gelegenen Punkte o aus Strahlen nach den Punkten einer Kreislinie oder einer Schraubenlinie und trägt auf diesen Strahlen von o aus Vectoren u ab, deren Länge nach einem gegebenen Gesetze variirt, so ist

$$u\,(\mathrm{Cos}\, m + j \,\mathrm{Sin}\, m)$$

ein Ausdruck, der Grösse und Richtung eines solchen Vectors bestimmt, und der also bei der Untersuchung der konischen Curven, die man so erhält, benutzt werden kann.

Dritter Abschnitt.

Die planimetrischen Functionen.

§. 37. Definition und Eigenschaften der Planfunctionen.

1. — Zur Festlegung eines Punktes m in der Ebene des Dreiecks $a\,b\,c$, dessen Ecken wir als die Fundamentalpunkte bezeichnen wollen, benützen wir die drei Dreiecke, welche m zur Spitze und die Seiten des Dreiecks zu Grundlinien haben. Dabei betrachten wir den Inhalt eines solchen Theildreiecks als positiv oder negativ, je nachdem dasselbe in Bezug auf seine Basis mit dem Fundamentaldreieck auf derselben Seite liegt oder nicht. Mit Berücksichtigung der Vorzeichen gilt dann allgemein die Gleichung

$$m\,b\,c + m\,c\,a + m\,a\,b = a\,b\,c,$$

oder kürzer

$$\triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 = \triangle.$$

Nennen wir nun die Quotienten

$$\frac{\triangle_1}{\triangle},\quad \frac{\triangle_2}{\triangle},\quad \frac{\triangle_3}{\triangle}$$

beziehungsweise den ersten, zweiten und dritten Cosinus des Punktes m in Bezug auf das Dreieck $a\,b\,c$, und bezeichnen wir diese Quotienten mit

$$\mathrm{Cos}_1\, m,\quad \mathrm{Cos}_2\, m,\quad \mathrm{Cos}_3\, m,$$

eine Bezeichnung die aber, wie aus Späterem hervorgehen wird, auch ersetzt werden kann durch

$$\mathrm{Cos}\, a\, m,\quad \mathrm{Cos}\, b\, m,\quad \mathrm{Cos}\, c\, m,$$

so gilt der Satz

$$\mathrm{Cos}_1\, m + \mathrm{Cos}_2\, m + \mathrm{Cos}_3\, m = 1.$$

Setzen wir ferner

$$1 - \mathrm{Cos}_1\, m = \mathrm{Sin}_1\, m,$$
$$1 - \mathrm{Cos}_2\, m = \mathrm{Sin}_2\, m,$$
$$1 - \mathrm{Cos}_3\, m = \mathrm{Sin}_3\, m,$$

so ergiebt sich leicht, dass

$$\mathrm{Sin}_1 \mathfrak{m} + \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{m} + \mathrm{Sin}_3 \mathfrak{m} = 2,$$

Formeln, die ganz den bekannten Sätzen aus dem Raume entsprechen über die Functionen der Winkel, die eine Gerade mit drei aufeinander rechtwinkligen Axen macht, nämlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$
$$\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 = 2.$$

Die geometrische Bedeutung der oben definirten Sinusse ist leicht ersichtlich. Es ist z. B.

$$\mathrm{Sin}_1 \mathfrak{m} = \frac{\triangle - \triangle_1}{\triangle} = \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}.$$

Wir wollen, wo diess nöthig ist, die neuen Functionen des Punktes $\mathfrak{m}$ seine planimetrischen oder Plan-Functionen nennen. Die Bedeutung der planimetrischen Tangente, Cotangente u. s. w. ist von selbst klar.

2. — Wir haben die planimetrischen Functionen des Punktes $\mathfrak{m}$ definirt als Quotienten aus den Theildreiecken, in die der Punkt $\mathfrak{m}$ das Fundamentaldreieck zerlegt. Man kann aber diese Quotienten auch als longimetrische Functionen von $\mathfrak{m}$ auffassen in Bezug auf die drei Streifen, (vergl. §. 14, 2 am Ende), die man erhält, wenn man durch die Ecken des Fundamentaldreiecks Parallele a', b', c' zu den Gegenseiten a, b, c zieht. Dann ist $\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m}$ der longimetrische Cosinus des Punktes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf den Streifen a'a; $\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{m}$ ist der longimetrische Cosinus von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf b'b etc.

Endlich ergeben sich die planimetrischen Functionen von $\mathfrak{m}$ auch leicht als Quotienten der Stücke, in welche der Punkt $\mathfrak{m}$ die Strecken theilt, die von den Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{m}$ bis an die Gegenseiten des Fundamentaldreiecks gezogen sind.

3. — Von den planimetrischen Functionen gelten nun nach Vorstehendem auch die Sätze, die wir von den longimetrischen bewiesen haben. So ist

$$\mathrm{Sin}_1 \mathfrak{m} + \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m} = 1,$$
$$1 + \mathrm{Tang}_1 \mathfrak{m} = \mathrm{Sec}_1 \mathfrak{m},$$
$$1 + \mathrm{Cot}_1 \mathfrak{m} = \mathrm{Cosec}_1 \mathfrak{m}.$$

Es ist ferner

$$\mathrm{Sin}_1 (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) = \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{m}\ \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{n} + \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m}\ \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{n} + 2\,\mathrm{Sin}_1 \mathfrak{m}\ \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{n}$$

und z. B.

$$\mathrm{Cos}_2 (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) = \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{m}\ \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{n} - \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{m}\ \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{n}.$$

Der Nachweis für die Giltigkeit dieser Formeln ergiebt sich dadurch, dass man zeigt, dass das Verhältniss der bezüglichen Flächenstücke gleich

einem Streckenquotienten ist, für welchen die Richtigkeit des Satzes aus Früherem folgt.

Allein hier ist die Frage zu erörtern, was unter $m + n$ zu verstehen sei. Bei den longimetrischen Untersuchungen bedeuteten m und n eigentlich die Strecken $a\,m$ und $a\,n$. Einen ähnlichen Sinn müssen wir auch hier m und n beilegen nur mit dem Zusatze, dass

$$\mathrm{Sin}_1\,(m + n) = \mathrm{Sin}_1\,(a\,m + a\,n),$$

dagegen

$$\mathrm{Sin}_2\,(m + n) = \mathrm{Sin}_2\,(b\,m + b\,n).$$

Ist denn nun $a\,m + a\,n$ derselbe neue Punkt wie $b\,m + b\,n$? Keineswegs. Wir wollen unter $m + n = a\,m + a\,n$ den Punkt verstehen, der sich ergiebt, wenn man an $a\,m$ die Strecke $a\,n$ mit Beibehaltung ihrer Grösse und Richtung abträgt, d.h. den Punkt, der sich durch die sogenannte geometrische Addition der Strecken $a\,m$ und $a\,n$ ergiebt; wenn wir dann die entsprechende Definition für $b\,m + b\,n$ gelten lassen, so gelangen wir zu einem ganz anderen Punkte wie vorher. Hier sieht man die Nothwendigkeit der Bezeichnung der Plan-Functionen durch Indices an den Abkürzungen Sin, Cos etc. Denn es kann ja verlangt werden

$$\mathrm{Sin}_1\,(a\,m + a\,n),\quad \mathrm{Sin}_2\,(a\,m + a\,n),\quad \mathrm{Sin}_3\,(a\,m + a\,n),$$

ebenso wie

$$\mathrm{Sin}_1\,(b\,m + b\,n),\quad \mathrm{Sin}_2\,(b\,m + b\,n),\quad \mathrm{Sin}_3\,(b\,m + b\,n),$$

und endlich

$$\mathrm{Sin}_1\,(c\,m + c\,n),\quad \mathrm{Sin}_2\,(c\,m + c\,n),\quad \mathrm{Sin}_3\,(c\,m + c\,n).$$

Wenn keine nähere Angabe gemacht ist, so könnte

$$\mathrm{Sin}_k\,(m + n)$$

der Sinus in Bezug auf k von $k\,m + k\,n$ sein, wobei k gleich 1, 2 oder 3 ist und a, b oder c entspricht.

Zwischen $\mathrm{Cos}_2\,(a\,m + a\,n)$ und $\mathrm{Cos}_2\,(b\,m + b\,n)$ besteht eine eigenthümliche und einfache Beziehung. Es ist nämlich allgemein

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cos}_2\,(a\,m + a\,n) &= 1 + \mathrm{Cos}_2\,(b\,m + b\,n),\\
\mathrm{Cos}_3\,(a\,m + a\,n) &= 1 + \mathrm{Cos}_3\,(c\,m + c\,n),\\
\mathrm{Cos}_1\,(b\,m + b\,n) &= 1 + \mathrm{Cos}_1\,(a\,m + a\,n),\\
\mathrm{Cos}_3\,(b\,m + b\,n) &= 1 + \mathrm{Cos}_3\,(c\,m + c\,n),\\
\mathrm{Cos}_1\,(c\,m + c\,n) &= 1 + \mathrm{Cos}_1\,(a\,m + a\,n),\\
\mathrm{Cos}_2\,(c\,m + c\,n) &= 1 + \mathrm{Cos}_2\,(b\,m + b\,n).
\end{aligned}$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Formeln ergiebt sich ohne Schwierigkeit mit Hilfe einer Figur. Construirt man nämlich (Fig. 19) die Punkte $a\,m + a\,n$ und $b\,m + b\,n$, und sei der erstere etwa a_1, der letztere b_1, so ist die Gerade $a_1\,b_1$ parallel und gleich $a\,b$ als Gegenseiten des Vierecks $a\,b\,a_1\,b_1$, worin die Diagonalen einander halbiren.

Es ist ferner

$$\mathrm{Cos}_2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{n}) = \frac{\triangle\, \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{\triangle\, \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}},$$

$$\mathrm{Cos}_2(\mathfrak{b}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{n}) = \frac{\triangle\, \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}}{\triangle\, \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}.$$

Es ist aber immer

$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c},$$

folglich

$$\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{a}_1 - \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b}_1 = 1,$$

und

$$\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{a}_1 = 1 + \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b}_1$$

oder

$$\mathrm{Cos}_2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{n}) = 1 + \mathrm{Cos}_2(\mathfrak{b}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{n}).$$

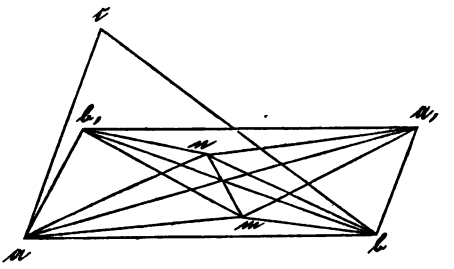

Fig. 19.

4. — Die planimetrischen Functionen gestatten Verwendung in der analytischen Geometrie. Denkt man sich einen Punkt $\mathfrak{m}$ (vergl. Fig. 17) in der Ebene der Fundamentalpunkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ festgelegt durch seine drei Abstände v_1, v_2, v_3 von den Seiten des Grund-Dreiecks; sei ferner eine Gerade $\mathfrak{m}$ bestimmt durch die Abschnitte u_1, u_2, u_3, die von derselben auf drei durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gehenden parallelen Axen in der Ebene der Fundamentalpunkte abgeschnitten werden, so ist, wenn der Punkt $\mathfrak{m}$ auf der Geraden $\mathfrak{m}$ liegt,

$$\mathfrak{a}\,u_1\,v_1 + \mathfrak{b}\,u_2\,v_2 + \mathfrak{c}\,u_3\,v_3 = 0$$

eine Gleichung in homogenen Coordinaten, deren Ableitung sich in §. 30, 2 und 3 findet. Dieselbe stellt, wenn

$$v_1,\ v_2,\ v_3$$

variabel genommen werden, die Gleichung der Geraden dar, welche durch u_1, u_2, u_3 bestimmt ist. Sie stellt dagegen den Punkt $\mathfrak{m}$ mit den constanten Coordinaten v_1, v_2, v_3 dar, wenn u_1, u_2, u_3 als die variabeln Coordinaten der Geraden genommen werden, die durch den Punkt $\mathfrak{m}$ gehen. Zugleich finden folgende Bedingungsgleichungen statt:

$$\mathfrak{a}\,v_1 + \mathfrak{b}\,v_2 + \mathfrak{c}\,v_3 = 2\triangle,$$

wenn $\triangle$ der Inhalt des Fundamentaldreiecks ist; ausserdem ist

$$u_1\,h_{23} + u_2\,h_{31} + u_3\,h_{12} = 2\triangle,$$

worin die h die Abstände der parallelen Axen von einander bezeichnen. Diese Bedingungsgleichungen gestatten es, nicht homogene Gleichungen homogen zu machen. Die obenstehende Gleichung des Punktes in homogenen Liniencoordinaten lässt sich mit Benutzung der planimetrischen Functionen auch schreiben

$$u_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + u_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + u_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m} = 0,$$

wie sich durch Division mit $2\triangle$ ergiebt.

5. — Der Inhalt des Dreiecks $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3$ in der Ebene des Fundamentaldreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ergiebt sich mit Hilfe der planimetrischen Functionen der Ecken $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ und $\mathfrak{m}_3$ folgendermassen.

Es seien $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, $x_3\,y_3$ die den Seiten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ parallelen cartesischen Coordinaten der Eckpunkte $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$. Dann ist, wenn wir den Inhalt des Dreiecks $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3$ mit J bezeichnen nach einem bekannten Satze

$$\pm 2\,J = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \sin\alpha = \begin{vmatrix} x_1 \sin\alpha, & y_1 \sin\alpha, & 1 \\ x_2 \sin\alpha, & y_2 \sin\alpha, & 1 \\ x_3 \sin\alpha, & y_3 \sin\alpha, & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & 1 \\ \xi_2, & \eta_2, & 1 \\ \xi_3, & \eta_3, & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sin\alpha},$$

wenn die ξ und η die Abstände der Eckpunkte des Dreiecks $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3$ von den Seiten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ sind. Durch Multiplication und Division mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, den Seiten des Fundamentaldreiecks, erhalten wir

$$\pm 2\,J = \frac{1}{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\sin\alpha} \begin{vmatrix} \mathfrak{b}\,\xi_1, & \mathfrak{c}\,\eta_1, & 1 \\ \mathfrak{b}\,\xi_2, & \mathfrak{c}\,\eta_2, & 1 \\ \mathfrak{b}\,\xi_3, & \mathfrak{c}\,\eta_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Da aber $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\sin\alpha = 2\triangle$, ferner $\mathfrak{b}\,\xi_1 = 2.\triangle\,\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ etc., so ergiebt diese Determinante, wenn wir dieselbe mit $4\triangle^2$ dividiren und multipliciren

$$\pm 2\,J = 2\triangle \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m}_1, & \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}_1, & 1 \\ \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m}_2, & \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}_2, & 1 \\ \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m}_3, & \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Indem wir endlich die zwei ersten Colonnen von der dritten abziehen und diese dann zur ersten machen, erhalten wir

$$\pm J = \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m}_1, & \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m}_1, & \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}_1 \\ \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m}_2, & \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m}_2, & \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}_2 \\ \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m}_3, & \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m}_3, & \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}_3 \end{vmatrix} \triangle.$$

6. — Errichtet man in den Eckpunkten des Fundamentaldreiecks Senkrechten auf die Ebene desselben, so kann eine Ebene im Raume festgelegt werden durch die Abschnitte

$$x,\ y,\ z,$$

die sie auf diesen drei Axen bildet. Mit Hilfe dieser Coordinaten lässt sich dann eine analytische Geometrie des Raumes durchführen, wobei die Ebene als Element auftritt. Es ist z. B. die Gleichung eines Punktes $\mathfrak{m}$, der von der Fundamentalebene um p absteht,

$$x\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + y\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + z\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m} = p,$$

wobei die Cosinusse in dem Fundamentaldreieck in Bezug auf den Fusspunkt von p, oder auch in einem Hilfsdreieck genommen werden können, das sich durch die Axendurchstichspunkte einer jeden Ebene ergiebt, die man durch den Punkt m legt. Die vorstehende Formel ergiebt sich in folgender Weise. Eine durch den Punkt m gelegte Ebene x y z bestimmt mit den Axenebenen und der Fundamentalebene einen prismatischen Pfeiler, dessen Inhalt

$$P = {}^1/_3 (x + y + z) \triangle.$$

Derselbe ist aber auch der Summe der drei prismatischen Pfeiler gleich, die auf den durch den Fusspunkt von p gebildeten Theildreiecken $\triangle_1$, $\triangle_2$ und $\triangle_3$ stehen und deren Volumina bezüglich

$$\begin{gathered} {}^1/_3 (y + z + p) \triangle_1, \\ {}^1/_3 (z + x + p) \triangle_2, \\ {}^1/_3 (x + y + p) \triangle_3 \end{gathered}$$

sind. Es ist daher

$$(x + y + z) \triangle = (y + z + p) \triangle_1 + (z + x + p) \triangle_2 + (x + y + p) \triangle_3,$$

oder

$$x \triangle_1 + y \triangle_2 + z \triangle_3 = p \triangle,$$

woraus durch Division mit $\triangle$ sich ergiebt

$$x \operatorname{Cos}_1 m + y \operatorname{Cos}_2 m + z \operatorname{Cos}_3 m = p,$$

eine Gleichung, die leicht auf die Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

gebracht werden kann, worin a, b, c Axenabschnitte sind, deren Bedeutung sich leicht ergiebt.

Setzt man für die Coordinaten einer Ebene $x = u \operatorname{Cos}_1 p$, $y = u \operatorname{Cos}_2 p$, $z = u \operatorname{Cos}_3 p$, so ist $u = x + y + z$, während

$$\operatorname{Cos}_1 p = \frac{x}{x+y+z}, \quad \operatorname{Cos}_2 p = \frac{y}{x+y+z}, \quad \operatorname{Cos}_3 p = \frac{z}{x+y+z}$$

ist. Wir hätten damit eine Art Polarcoordinatensystem für räumliche Untersuchungen gefunden, wenn die Ebene als Element dient. Dabei kommt eine Art Hilfspunkt p ins Spiel, der das Fundamentaldreieck so zerlegt, dass die Theildreiecke den Axenabschnitten der Ebene proportional sind. Der Radius-Vector u dagegen ist dem Inhalt des von der Ebene abgeschnittenen prismatischen Pfeilers proportional, eine Beziehung, die für Untersuchungen in der Kinematik von Wichtigkeit ist. (Vergl. §. 32, 5).

7. — Die planimetrischen Functionen eines Punktes gestatten eine Uebertragung auf Dreiecksquotienten auf der Kugelfläche. Auch dort lässt sich ein Punkt bestimmt denken durch die drei Verhältnisszahlen der Theildreiecke, die er in einem sphärischen Grunddreieck bildet, zu dem Grund-

dreiecke selbst. Diese (sphärischen) Quotienten würden zugleich zur Festlegung von Strahlen dienen können, welche durch den Scheitel einer Fundamentalecke gezogen sind.

Es muss ferneren Untersuchungen überlassen bleiben, festzustellen, wie weit diese sphärischen Flächenfunctionen und die in §. 36, 1 angedeuteten cyklo-longimetrischen Functionen dazu geeignet sind, die goniometrischen Quaternionen theilweise zu ersetzen.

§. 38. Complexe Ausdrücke mit planimetrischen Functionen.

1. — Die Theorie der longimetrisch complexen Zahlen gestattet eine Erweiterung durch Einführung planimetrischer Functionen. Bezeichnen j und k zwei Werthe, für welche

$$j^2 = 2j - 1,$$
$$k^2 = 2k - 1,$$
$$jk = j + k - 1,$$

so hat

$$\mathrm{Cos}_1 m + j \mathrm{Cos}_2 m + k \mathrm{Cos}_3 m$$

die Bedeutung eines Stellenzeigers für den Punkt m in der Ebene des Fundamentaldreiecks a b c.

Denken wir uns nämlich in der Ebene a b c von a aus eine Gerade durch den Punkt m bis nach a' auf b c gezogen, so kann eine Strecke w, die ihren Anfang in m hat, zerlegt werden in die Parallelen w_1 und w', wovon erstere in a, letztere in a' auf b c anfängt. Dabei ist

$$w_1 = w \mathrm{Cos}_1 m,$$
$$w' = w \mathrm{Sin}_1 m,$$

und wir können setzen

$$w_m = w (\mathrm{Cos}_1 m + j_0 \mathrm{Sin}_1 m),$$

wobei j_0 den Verschiebungsfactor von a nach a' bedeuten soll.

Die in a' befindliche Strecke w' lässt sich aber wieder zerlegen in w_2 in b und in w_3 in c, so dass

$$w_2 = w' \cdot \frac{a'c}{bc},$$
$$w_3 = w' \cdot \frac{ba'}{bc}.$$

Da aber

$$\frac{a'c}{bc} = \frac{amc}{abmc} = \frac{\mathrm{Cos}_2 m}{\mathrm{Sin}_1 m}$$

und

$$\frac{ba'}{bc} = \frac{amb}{abmc} = \frac{\mathrm{Cos}_3 m}{\mathrm{Sin}_1 m},$$

so wird

$$w_2 = w \operatorname{Cos}_2 m,$$
$$w_3 = w \operatorname{Cos}_3 m.$$

Es ist also jetzt w mit seinem Anfang in m ersetzt durch w_1, w_2 und w_3 in a, b und c.

Bezeichnen wir nun den Verschiebungsfactor von a nach b mit j, und den von a nach c mit k, so ist

$$w_m = w (\operatorname{Cos}_1 m + j \operatorname{Cos}_2 m + k \operatorname{Cos}_3 m).$$

Es haben also j und k hierin die Bedeutung, dass sie eine damit multiplicirte Strecke in der Richtung a b resp. a c um die Längen a b und a c in eine parallele Lage verschieben. Das Product j k wird daher die damit behaftete Grösse von a erst nach b und dann von dort parallel der Richtung a c und um die Länge a c weiter schieben bis a_2.

Diese Verschiebung ist dann äquivalent mit einer Verschiebung in der Richtung der Mittellinie $a a_1$ des Grunddreiecks und um die doppelte Länge derselben. Derselbe Punkt a_2 würde sich aber auch als Stelle ergeben, wenn man die Strecke w in b und in c anbrächte und ausserdem in a die Länge — w. Denn dann setzen sich, mit Benutzung der in §. 34, 3 gegebenen Sätze über die Addition paralleler Strecken, w_b und w_c zu $2 w_{a_1}$ in der Mitte von b c zusammen, welche Strecke mit — w in a die Strecke w_{a_2} in der Entfernung $2 a a_1$ liefert. Es ist also hiermit die Richtigkeit bewiesen von

$$w j k = w (j + k - 1),$$

eine Relation, deren commutative Eigenschaft sofort einleuchtet.

2. — Es kann nun ohne Schwierigkeit der Stellenfactor jedes Punktes in der Ebene des Grunddreiecks gefunden werden. So sind die Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks bezeichnet durch

$$\tfrac{1}{2}(1 + j), \quad \tfrac{1}{2}(j + k) \text{ und } \tfrac{1}{2}(1 + k).$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks dagegen hat

$$\tfrac{1}{3}(1 + j + k)$$

zum Stellenfactor. Je nachdem man in dem letzten Ausdruck einem der Glieder ein negatives Vorzeichen giebt und den Factor $\frac{1}{3}$ weglässt, erhält man andre Punkte, die dem Schwerpunkt harmonisch zugeordnet sind; es sind diess die Ecken des dem Grunddreieck umschriebenen und ihm parallelseitigen Dreiecks.

Der Stellenfactor eines Punktes muss dem Werthe nach gleich der Einheit sein. Wenn daher die Summe der Coefficienten in

$$A + j B + k C,$$

d. h. A + B + C nicht gleich der Einheit ist, so muss eigentlich der ganze Ausdruck noch mit A + B + C dividirt werden, um den richtigen Stellenfactor zu ergeben. Wenn diess in den folgenden Beispielen nicht

überall geschehen, so unterblieb diess nur der einfacheren Schreibweise wegen, und weil dieser kleine Fehler leicht verbessert werden kann.

Es sind ferner im Dreieck a b c

$$a \pm j\,b \pm k\,c$$

oder

$$\sin\alpha \pm j \sin\beta \pm k \sin\gamma$$

die Repräsentanten der Mittelpunkte der Berührungskreise des Grunddreiecks, während

$$\sin 2\alpha \pm j \sin 2\beta \pm k \sin 2\gamma$$

den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und der ihm in Bezug auf die Scheitel und Gegenseiten zugeordneten harmonischen Punkte darstellt.

$$\sin 2\beta + \sin 2\gamma + j\,(\sin 2\alpha + \sin 2\gamma) + k\,(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$$

gehört zu dem Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises, welcher bekanntlich durch die Fusspunkte der Höhen und durch die Halbirungspunkte der Seiten geht.

Aus diesen complexen Ausdrücken für die Punkte der Ebene des Grunddreiecks lassen sich leicht Beziehungen über die Lage der Punkte zu einander ableiten. So ergiebt sich aus der Stellenzahl des Mittelpunkts des umgeschriebenen und der des Feuerbach'schen Kreises leicht die Zahl des Schwerpunktes durch Addition, woraus folgt, dass diese drei Punkte in einer Geraden liegen.

Die Stellenzahl jedes Punktes der Ebene des Grunddreiecks a b c ist übrigens, wie sich zeigen wird, enthalten in dem Ausdrucke

$$j_1^{\xi} \cdot j_2^{\eta},$$

wenn ξ und η die Masszahlen der Coordinaten x und y dieser Punkte sind. Dabei sind a b und a c die Richtungen der Axen und j_1 und j_2 die Verschiebungscoefficienten in diesen Richtungen um die Masseinheiten.

3. — Für die planimetrischen complexen Zahlen in reducirter Form gilt ebenfalls die Moivre'sche Formel, indem

$$(\mathrm{Cos}_1 m + j\,\mathrm{Cos}_2 m + k\,\mathrm{Cos}_3 m)\ (\mathrm{Cos}_1 n + j\,\mathrm{Cos}_2 n + k\,\mathrm{Cos}_3 n)$$
$$= \mathrm{Cos}_1 (m+n) + j\,\mathrm{Cos}_2 (m+n) + k\,\mathrm{Cos}_3 (m+n).$$

Dabei ist unter $m + n$ zu verstehen

$$a\,m + a\,n.$$

Es ist nämlich das entwickelte Product obiger zwei complexen Ausdrücke gleich

$$\mathrm{Cos}_1 m\,\mathrm{Cos}_1 n + j\,(\mathrm{Cos}_1 m\,\mathrm{Cos}_2 n + \mathrm{Cos}_2 m\,\mathrm{Cos}_1 n)$$
$$+ k\,(\mathrm{Cos}_1 m\,\mathrm{Cos}_3 n + \mathrm{Cos}_3 m\,\mathrm{Cos}_1 n) + j^2\,\mathrm{Cos}_2 m\,\mathrm{Cos}_2 n$$
$$+ j\,k\,(\mathrm{Cos}_2 m\,\mathrm{Cos}_3 n + \mathrm{Cos}_3 m\,\mathrm{Cos}_2 n) + k^2\,\mathrm{Cos}_3 m\,\mathrm{Cos}_3 n.$$

Indem man nun j^2, j k und k^2 durch ihre oben gegebenen Aequivalente

$$2j - 1;\ j + k - 1;\ 2k - 1$$

ersetzt, erhält man zuerst als von j und k freies Glied

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cos}_1 m \mathrm{Cos}_1 n - \mathrm{Cos}_2 m \mathrm{Cos}_2 n - \mathrm{Cos}_3 m \mathrm{Cos}_3 n - \mathrm{Cos}_2 m \mathrm{Cos}_3 n - \mathrm{Cos}_3 m \mathrm{Cos}_2 n\\ &= \mathrm{Cos}_1 m \mathrm{Cos}_1 n - (\mathrm{Cos}_2 m + \mathrm{Cos}_3 m)(\mathrm{Cos}_2 n + \mathrm{Cos}_3 n)\\ &= \mathrm{Cos}_1 m \mathrm{Cos}_1 n - (1 - \mathrm{Cos}_1 m)(1 - \mathrm{Cos}_1 n)\\ &= \mathrm{Cos}_1 m \mathrm{Cos}_1 n - \mathrm{Sin}_1 m \mathrm{Sin}_1 n = \mathrm{Cos}_1 (m+n);\end{aligned}$$

sodann das mit j behaftete Glied

$$\begin{aligned}&\mathrm{j}(\mathrm{Cos}_1 m \mathrm{Cos}_2 n + \mathrm{Cos}_2 m \mathrm{Cos}_1 n + 2\mathrm{Cos}_2 m \mathrm{Cos}_2 n\\ &\quad + \mathrm{Cos}_2 m \mathrm{Cos}_3 n + \mathrm{Cos}_3 m \mathrm{Cos}_2 n)\\ &= \mathrm{j}[\mathrm{Cos}_2 m (\mathrm{Cos}_1 n + \mathrm{Cos}_2 n + \mathrm{Cos}_3 n)\\ &\quad + \mathrm{Cos}_2 n(\mathrm{Cos}_1 m + \mathrm{Cos}_2 m + \mathrm{Cos}_3 m)]\\ &= \mathrm{j}(\mathrm{Cos}_2 m + \mathrm{Cos}_2 n) = \mathrm{j}[\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} m + \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} n]\\ &\quad = \mathrm{j}(2 - \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{b} m - \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{b} n)\\ &= \mathrm{j}[2 - \mathrm{Sin}_2(\mathfrak{b} m + \mathfrak{b} n)] = \mathrm{j}[1 + \mathrm{Cos}_2(\mathfrak{b} m + \mathfrak{b} n)].\end{aligned}$$

Dabei ist in den letzten vier Ausdrücken der Uebergang von $\mathfrak{a} m$ und $\mathfrak{a} n$ zu $\mathfrak{b} m$ und $\mathfrak{b} n$ zu beachten. Nach (3.) des vorigen Paragraphen ist aber

$$1 + \mathrm{Cos}_2(\mathfrak{b} m + \mathfrak{b} n) = \mathrm{Cos}_2(\mathfrak{a} m + \mathfrak{a} n).$$

Mithin reducirt sich das mit j behaftete Glied auf

$$\mathrm{j}\,\mathrm{Cos}_2(\mathfrak{a} m + \mathfrak{a} n) = \mathrm{j}\,\mathrm{Cos}_2(m+n).$$

Drittens bekommen wir

$$\begin{aligned}&\mathrm{k}(\mathrm{Cos}_1 m \mathrm{Cos}_3 n + \mathrm{Cos}_3 m \mathrm{Cos}_1 n + 2\mathrm{Cos}_3 m \mathrm{Cos}_3 n + \mathrm{Cos}_2 m \mathrm{Cos}_3 n\\ &\quad + \mathrm{Cos}_3 m \,.\, \mathrm{Cos}_2 n)\\ &= \mathrm{k}[\mathrm{Cos}_3 m (\mathrm{Cos}_1 n + \mathrm{Cos}_2 n + \mathrm{Cos}_3 n)\\ &\quad + \mathrm{Cos}_3 n (\mathrm{Cos}_1 m + \mathrm{Cos}_2 m + \mathrm{Cos}_3 m)]\\ &= \mathrm{k}(\mathrm{Cos}_3 m + \mathrm{Cos}_3 n) = \mathrm{k}(\mathrm{Cos}_3 \mathfrak{c} m + \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{c} n)\\ &\quad = \mathrm{k}(2 - \mathrm{Sin}_3 \mathfrak{c} m - \mathrm{Sin}_3 \mathfrak{c} n) = \mathrm{k}[2 - \mathrm{Sin}_3(\mathfrak{c} m + \mathfrak{c} n)]\\ &= \mathrm{k}[1 + \mathrm{Cos}_3(\mathfrak{c} m + \mathfrak{c} n)] = \mathrm{k}\,\mathrm{Cos}_3(\mathfrak{a} m + \mathfrak{a} n) = \mathrm{k}\,\mathrm{Cos}_3(m+n).\end{aligned}$$

Daher haben wir als Product der zwei planimetrisch complexen Zahlen den Ausdruck

$$\mathrm{Cos}_1(m+n) + \mathrm{j}\,\mathrm{Cos}_2(m+n) + \mathrm{k}\,\mathrm{Cos}_3(m+n),$$

wobei $m + n$ überall sich auf $\mathfrak{a}$ als Anfang bezieht, d. h. gleich $\mathfrak{a} m + \mathfrak{a} n$ ist.

Es gilt mithin auch, wie leicht zu erweisen, die erweiterte Moivresche Formel

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Cos}_1 m + \mathrm{j}\,\mathrm{Cos}_2 m + \mathrm{k}\,\mathrm{Cos}_3 m)^n\\ &\quad = \mathrm{Cos}_1 n m + \mathrm{j}\,\mathrm{Cos}_2 n m + \mathrm{k}\,\mathrm{Cos}_3 n m,\end{aligned}$$

oder genauer

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{a} m + \mathrm{j}\,\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{a} m + \mathrm{k}\,\mathrm{Cos}_3 \mathfrak{a} m)^n\\ &\quad = \mathrm{Cos}_1 n \,.\, \mathfrak{a} m + \mathrm{j}\,\mathrm{Cos}_2 n \,.\, \mathfrak{a} m + \mathrm{k}\,\mathrm{Cos}_3 n \,.\, \mathfrak{a} m.\end{aligned}$$

Die Bedeutung dieses Ausdrucks ist, dass, während die linke Seite verlangt, man solle vom Punkt a aus n mal nach einander in der Richtung a m um die Strecke a m fortgehen, die rechte Seite auf einmal in derselben Richtung um n . a m fortschreitet.

Während also j und k Verschiebungen in den Richtungen a b und a c um die Längen a b und a c bewirken, ist

$$\mathrm{Cos}_1 m + j\,\mathrm{Cos}_2 m + k\,\mathrm{Cos}_3 m$$

ein Factor, welcher die damit multiplicirte Grösse in der Richtung a m um die Länge a m verschiebt.

4. — Die Rechnung mit den so erlangten complexen Zahlen von der Form

$$A + j\,B + k\,C$$

erfolgt ganz nach den allgemein giltigen Gesetzen der Arithmetik. Das Resultat einer solchen Rechnung, wobei wir vorläufig nur an die Grundrechnungsarten denken, lässt sich immer wieder auf obige Form bringen, wenn man die mehrfach erwähnten Beziehungen

$$\begin{aligned} j^2 &= 2j - 1, \\ k^2 &= 2k - 1, \\ jk &= j + k - 1 \end{aligned}$$

berücksichtigt.

Es lässt sich übrigens leicht jede dieser Ternionen auf die Normalform bringen, indem wir

$$A + jB + kC = w\left(\frac{A}{w} + j\frac{B}{w} + k\frac{C}{w}\right)$$

setzen, wenn

$$w = A + B + C$$

ist. Lassen wir dann

$$\begin{aligned} \frac{A}{w} &= \mathrm{Cos}_1 m, \\ \frac{B}{w} &= \mathrm{Cos}_2 m, \\ \frac{C}{w} &= \mathrm{Cos}_3 m \end{aligned}$$

sein, so ergiebt sich

$$A + jB + kC = w\,(\mathrm{Cos}_1 m + j\,\mathrm{Cos}_2 m + k\,\mathrm{Cos}_3 m).$$

So finden wir z. B.

$$1 + k + j = 3\,(1/3 + 1/3\,k + 1/3\,j).$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{j} &= \frac{1}{\mathrm{Cos}_1 b + j\,\mathrm{Cos}_2 b + k\,\mathrm{Cos}_3 b} \\ &= (\mathrm{Cos}_1 b + j\,\mathrm{Cos}_2 b + k\,\mathrm{Cos}_3 b)^{-1}, \end{aligned}$$

und mit Anwendung der erweiterten Moivre'schen Formel

$$\frac{1}{j} = \mathrm{Cos}_1(-b) + j\,\mathrm{Cos}_2(-b) + k\,\mathrm{Cos}_3(-b)$$
$$= \mathrm{Cos}_1(-ab) + j\,\mathrm{Cos}_2(-ab) + k\,\mathrm{Cos}_3(-ab) = 2 - j.$$

Ebenso ist

$$\frac{1}{k} = 2 - k,$$

wie man sich auch auf anderem Wege leicht überzeugen kann. Es ist ferner

$$\frac{j}{k} = \frac{0 + j.1 + k.0}{0 + j.0 + k.1} = \frac{\mathrm{Cos}_1 b + j\,\mathrm{Cos}_2 b + k\,\mathrm{Cos}_3 b}{\mathrm{Cos}_1 c + j\,\mathrm{Cos}_2 c + k\,\mathrm{Cos}_3 c}$$
$$= \mathrm{Cos}_1(b - c) + j\,\mathrm{Cos}_2(b - c) + k\,\mathrm{Cos}_3(b - c)$$
$$= 1 + j - k,$$

wie man findet, wenn man die Werthe der Cosinusse des Punktes $ab - ac$ ermittelt, d. h. des Punktes, den man erhält, wenn man von b aus die Strecke ca nach Grösse und Richtung abträgt.

Will man allgemein den in (2.) dieses Paragraphen angegebenen Ausdruck für die Stellenzahl eines Punktes

$$j_1^{\xi} \cdot j_2^{\eta},$$

worin ξ und η die Masszahlen der Coordinaten x und y dieses Punktes bezogen auf ab und ac als Coordinatenaxen sind, während j_1 und j_2 die Verschiebungsfactoren längs dieser Axen bedeuten, in ein Aggregat verwandeln, so setzt man

$$j_1 = \mathrm{Cos}_1 b + j_1\,\mathrm{Cos}_2 b + j_2\,\mathrm{Cos}_3 b,$$
$$j_2 = \mathrm{Cos}_1 c + j_1\,\mathrm{Cos}_2 c + j_2\,\mathrm{Cos}_3 c,$$

potenzirt diese Summen mit ξ resp. η und multiplicirt dann die erhaltenen Potenzen aus, beides mit Benutzung des erweiterten Moivre'schen Satzes. Hierin liegt zugleich der Beweis dafür, dass $j_1^{\xi} \cdot j_2^{\eta}$ ein Ausdruck für die Stellenzahl des Punktes $\xi\,\eta$ ist.

5. — Ist P_m eine Kraft, die ihren Angriffspunkt im Punkte m des Grunddreiecks hat, so lässt sich dieselbe zerlegen in

$$P_m = P_a + P_{a'},$$

wovon P_a in a, $P_{a'}$ in dem Punkte a' angreift, wo die Gerade am die Gegenseite bc schneidet. Es ist daher

$$P_a = P\,\mathrm{Cos}_1 m, \quad P_{a'} = P\,\mathrm{Sin}_1 m.$$

Es zerlegt sich aber $P_{a'}$ in

$$P_{a'} = P_b + P_c,$$

von denen sich zeigen lässt, dass

$$P_b = P\,\mathrm{Cos}_2 m, \quad P_c = P\,\mathrm{Cos}_3 m$$

ist. Mithin haben wir

$$P_m = P(\mathrm{Cos}_1 m + j\,\mathrm{Cos}_2 m + k\,\mathrm{Cos}_3 m).$$

Dabei sind natürlich die Componenten in a, b, c parallel zu P.

Dasselbe würde von einer Rotationsbewegung mit der Geschwindigkeit w um eine durch m gehende Axe gelten. Es ist

$$w_m = w(\mathrm{Cos}_1 m + j\,\mathrm{Cos}_2 m + k\,\mathrm{Cos}_3 m).$$

Mit Zuziehung kinematischer Betrachtungen ergiebt sich auch leicht die Richtigkeit der Formeln

$$j^2 = 2j - 1, \quad k^2 = 2k - 1 \quad \text{etc.}$$

Es ist z. B.

$$P\,j\,k$$

eine Kraft, die in dem Punkte angreift, den man erhält, wenn man von a nach b und von dort um die Länge a c und parallel der Richtung a c weiter geht. Es ist dagegen

$$P(-1 + j + k)$$

das Aggregat von drei Kräften P, wovon zwei positiv sind und in b und c wirken, während die Kraft — P in a angreift. Die Resultirende ist in der That P in dem oben gefundenen Punkte. Mithin muss

$$j\,k = -1 + j + k$$

sein.

Es mag noch erwähnt werden, dass eine kleine Transformation, ähnlich wie früher (§. 35, 8), statt Rotationen Translationen einführt. Da nämlich

$$\mathrm{Cos}_1 m = 1 - \mathrm{Cos}_2 m - \mathrm{Cos}_3 m,$$

so ist auch

$$w(\mathrm{Cos}_1 m + j\,\mathrm{Cos}_2 m + k\,\mathrm{Cos}_3 m) = w[1 + (j-1)\,\mathrm{Cos}_2 m + (k-1)\,\mathrm{Cos}_2 m)$$
$$= w(1 + j'\,\mathrm{Cos}_2 m + k'\,\mathrm{Cos}_3 m).$$

Es ist jetzt w_m zerlegt in w, welches in a wirkt, und in die beiden Componenten $j'\,w\,\mathrm{Cos}_2 m$ und $k'\,w\,\mathrm{Cos}_3 m$. Diese beiden letzteren sind Rotationspaare, folglich Translationen.

Denn es ist

$$w\,\mathrm{Cos}_2 m \,.\, j' = w\,\mathrm{Cos}_2 m\,(j-1) = w\,\mathrm{Cos}_2 m \,.\, j - w\,\mathrm{Cos}_2 m,$$

d. h. zwei gleiche und entgegengesetzte Rotationen um Axen durch b und a. Diese erzeugen dann eine Translation senkrecht zu a b. Ebenso ist $w\,\mathrm{Cos}_3 m \,.\, k'$ eine Translation senkrecht zu a c. Die Geschwindigkeiten dieser Translationen setzen sich zu einer Resultirenden zusammen, welche die Rotation von der Geschwindigkeit w um eine durch a gehende Axe überführt in eine Rotation von derselben Geschwindigkeit, deren Axe aber durch m geht, wie sich mit Hilfe der einfachen Gesetze nachweisen lässt, welche über diese Zusammensetzungen gelten.

6. — Jedem complexen Trinom von der Form

$$A + j\,B + k\,C$$

lässt sich auch hier eine dreifache Bedeutung auf geometrischem Gebiete abgewinnen. Bringen wir dasselbe auf die Form

$$w\,(\mathrm{Cos}_1\,m + j\,\mathrm{Cos}_2\,m + k\,\mathrm{Cos}_3\,m),$$

so können wir uns dadurch dargestellt denken die Strecke w, die von dem Punkte m der Grundebene aus parallel einer gegebenen Richtung in oder ausserhalb der Grundebene abgetragen ist; wir können uns aber auch zweitens das Trinom als Repräsentant des Endpunktes von w denken.

Setzen wir schliesslich

$$w\,\mathrm{Cos}_1\,m = x;\quad w\,\mathrm{Cos}_2\,m = y;\quad w\,\mathrm{Cos}_3\,m = z$$

und denken uns diese Strecken auf drei durch a, b und c gezogenen parallelen Geraden von a, b, c aus abgetragen, so wird dadurch eine Ebene mit den Coordinaten x, y und z festgelegt.

Wenn nun auch noch Gleichungen existiren, wodurch diese Coordinaten von einander abhängig gemacht werden, etwa dadurch, dass sie sämmtlich Functionen von t sind, so ist dadurch ein Mittel gegeben zur Untersuchung des Ortes jener Punkte oder des von jenen Ebenen umhüllten Gebildes. Ist dabei t die Zeit, so lässt sich mit Hilfe von

$$u = x + j\,y + k\,z$$

die Bewegung des durch u charakterisirten Gebildes untersuchen.

§. 39. Bicomplexe Ausdrücke mit goniometrischen und planimetrischen Functionen.

1. — Fassen wir

$$w\,.\,(\mathrm{Cos}_0\,m + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,m + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,m)$$

als Symbol für die im Punkte m des Grunddreiecks angebrachte Strecke w, so ist es mittelst der Planfunctionen möglich, Strecken festzulegen, die ihren Anfang in der Ebene des Grunddreiecks haben und einer gegebenen Richtung parallel laufen. Wollten wir diese letztere Beschränkung aufheben, so müssten wir analog den Betrachtungen in (§. 35, 4) statt w einen Ausdruck von der Form

$$w\,(\mathrm{Cos}\,\varphi_0 + i_1\,\mathrm{Cos}\,\varphi_1 + i_2\,\mathrm{Cos}\,\varphi_2)$$

einführen, worin φ_0, φ_1, φ_2 die Winkel sind, die eine durch den Scheitel a gezogene Strecke w mit den zwei anliegenden Seiten des Dreiecks und mit einer dritten durch a gehenden Geraden macht, die nicht in der Ebene des Grunddreiecks läge, während i_1 und i_2 allgemeine Drehfactoren sein müssten. Der Verfasser hat den Versuch gemacht, die Untersuchung führte aber auf Schwierigkeiten, die noch nicht überwunden sind.

Diese Unvollkommenheit wird jedoch ausgeglichen durch die im nächsten Abschnitte sich ergebende Möglichkeit, jede räumliche Strecke, wenn sie auch nicht der Bedingung unterworfen ist, dass ihr Anfang in

der Ebene des Grunddreiecks liegt, auszudrücken als Product zweier Aggregate von der Form

$$A + i_1 B + i_2 C + i_3 D$$

und

$$\mathfrak{A} + j_1 \mathfrak{B} + j_2 \mathfrak{C} + j_3 \mathfrak{D}.$$

Von dieser allgemeinen Aufgabe enthält die oben angedeutete Frage zwar nur einen besonderen Fall; es werden aber durch die vorstehend erwähnte allgemeinere Lösung drei nicht reelle Einheiten eingeführt, theils goniometrischer, theils longimetrischer Natur, und diess ist es gerade, was hier noch vermieden werden muss.

2. — Dagegen lässt sich mit Hilfe einfach complexer goniometrischer Ausdrücke und complexer Ausdrücke mit Planfunctionen jede Strecke in der Ebene des Grunddreiecks ausdrücken. In Bezug auf die Richtung der durch den Punkt m in dem Grunddreieck gezogenen Geraden w ist nämlich bis jetzt keine Bestimmung getroffen. Nehmen wir nun an, diese Strecke läge in der Ebene a b c selbst und sei gegen die Seite a b unter dem Winkel μ geneigt, so hat eine solche durch a gehende Strecke den Werth

$$w\,(\mathrm{Cos}\,\mu + j_\lambda\,\mathrm{Sin}\,\mu).$$

Wird dieser Ausdruck mit $\mathrm{Cos}_0\,m + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,m + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,m$ multiplicirt, so haben wir in dem Producte

$$w\,(\mathrm{Cos}\,\mu + j_\lambda\,\mathrm{Sin}\,\mu)\;(\mathrm{Cos}_0\,m + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,m + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,m)$$

den allgemeinsten Ausdruck für die Strecke w, die ihren Anfang im Punkte m hat und gegen a b unter dem Winkel μ geneigt ist. Die kleine Aenderung in der Bezeichnung der Plancomplexe wird wol keine Schwierigkeit machen. Es ist j und k durch j_1 und j_2 ersetzt, ebenso Cos_1, Cos_2, Cos_3 durch Cos_0, Cos_1, Cos_2.

Durch Ausmultipliciren führt dieses Product auf die Form

$$A + j_\lambda\,B + j_1\,C + j_1\,j_\lambda\,D + j_2\,E + j_2\,j_\lambda\,F,$$

d. h. auf eine neue Art complexer Zahlen, und zwar auf sechsgliedrige. Die Rechnung mit diesen Complexen wird so geführt, als wenn die darin vorkommenden Drehungs- und Schiebungscoefficienten j_λ, j_1 und j_2 reelle Werthe hätten. Die Potenzen von j_λ, j_1 und j_2 lassen sich mittelst der bekannten Formeln immer wieder auf die erste und nullte Potenz derselben zurückführen. Für die Multiplication und Division, sowie für die Potenzirung der sechsgliedrigen gemischten Quaternionen gilt auch wieder der erweiterte Moivre'sche Satz, wenn man diese Complexen erst auf die oben stehende reducirte Form gebracht hat.

Als Bedingung der Möglichkeit der Rückführung des sechsgliedrigen bicomplexen Ausdrucks auf das Product zweier complexen Factoren longimetrischer resp. goniometrischer Natur ergiebt sich leicht

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F},$$

da ein jeder dieser Quotienten tang μ darstellt. Finden diese Bedingungsgleichungen nicht statt, so führt obige Bicomplexe auf drei nicht parallele Strecken in den Ecken des Fundamentaldreiecks, mithin nicht auf eine Strecke als deren Summe.

3. — Lassen wir die in (2) gemachte Bedingung fallen, wonach w ganz in der Ebene a b c liegt, so können wir doch immerhin annehmen, dass w seinen Anfang in m hat und einer Geraden parallel geht, die mit a b den Winkel μ bildet. Dann ist w noch ausdrückbar durch

$$w \,.\, (\mathrm{Cos}\,\mu + j_\lambda \,\mathrm{Sin}\,\mu),$$

und als im Punkte m der Ebene a b c beginnend durch

$$w_m = w\,(\mathrm{Cos}\,\mu + j_\lambda \,\mathrm{Sin}\,\mu)\;(\mathrm{Cos}_0\, m + j_1\,\mathrm{Cos}_1\, m + j_2\,\mathrm{Cos}_2\, m).$$

Dieser Ausdruck führt durch Ausmultiplication zu denselben sechs Gliedern wie in (2.). Während aber dort diese Glieder drei Strecken vorstellen, die in einer Ebene liegen und in den drei Eckpunkten a, b, c ihren Anfang haben, liegen jetzt diese Strecken parallel zu einander im Raume.

Für das allgemeine Aggegrat

$$A + j_\lambda\, B + j_1\, C + j_1\, j_\lambda\, D + j_2 E + j_2\, j_\lambda\, E$$

gelten auch jetzt noch die oben angegebenen Bedingungen für die Rückführbarkeit auf eine einzige Strecke.

Finden diese Bedingungen nicht statt, so ist vorstehender Ausdruck der Vertreter dreier nicht paralleler Strecken. Stellen dieselben Rotationen oder Kräfte dar, so führt deren Zusammensetzung zu einer Schraubenbewegung. Man kann daher einen solchen sechsgliedrigen Ausdruck mit longimetrischen und goniometrischen Complexen eine Schraubenfunction oder eine helikometrische Function nennen. In besonderen Fällen stellt sie eine Translation oder eine Rotation dar, d. h. die Grenzfälle der Schraubenbewegung, und als solcher lässt sich auch der am Ende von (2.) erwähnte, nicht reducible Fall, auffassen.

Der Nachweis, dass ein nicht auf die Normalform reducirbarer Ausdruck

$$A + j_\lambda\, B + j_1\, C + j_1\, j_\lambda\, D + j_2\, E + j_2\, j_\lambda\, F$$

bei Voraussetzung von Kräften oder Rotationen im Raume auf die Elemente einer Schraubenbewegung führt, liesse sich auch noch so führen.

Wenn $\frac{A}{B}$ nicht gleich $\frac{C}{D}$ und $\frac{E}{F}$ ist, so lassen sich doch, nach Zufügung von $M\,(1 - j_1)$ und $N\,(1 - j_2)$ zu unsrer Bicomplexen, M und

N solche Werthe beilegen, dass der neue Ausdruck reducirbar wird. Es müsste zu diesem Zwecke sein

$$\frac{A + M + N}{B} = \frac{C - M}{D} = \frac{E - N}{F}.$$

Die hieraus sich ergebenden Werthe von M und N würden

$$A + M + N + j_\lambda B + j_1 (C - M) + j_1 j_\lambda D + j_2 (E - N) + j_2 j_\lambda F$$

auf die Form

$$w (\mathrm{Cos}\,\mu + j_\lambda \mathrm{Sin}\,\mu) (\mathrm{Cos}_0\, m + j_1 \mathrm{Cos}_1\, m + j_2 \mathrm{Cos}_2\, m)$$

reducirbar machen.

Der neue Ausdruck w_m stellt jetzt eine Strecke dar, also mechanisch entweder eine Kraft oder eine Rotation. Um den alten Werth aber wieder zu erlangen, müsste noch $M (j_1 - 1)$ und $N (j_2 - 1)$ zugefügt werden. Diess sind aber (vergl. §. 35, 8) entweder Kräfte- oder Rotationspaare, die im Allgemeinen mit der Kraft oder Rotation w_m die Elemente einer Schraubenbewegung bilden.

Vierter Abschnitt.

Die stereometrischen Functionen.

§. 40. Definition und Eigenschaften der Raumfunctionen.

1. — Zur Festlegung eines Punktes im Raume kann man vier Fundamentalpunkte

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}$$

annehmen. Bezeichnen wir den Inhalt des Tetraeders, das diese vier Punkte zu Ecken hat, mit T, und die Gegenseiten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ bezüglich mit

$$A,\ B,\ C,\ D,$$

so können wir die Theiltetraeder, welche einen Punkt $\mathfrak{m}$ zur Spitze und die vier Seiten von T zu Basen haben,

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4$$

nennen.

Führen wir diese letztern noch mit positivem oder negativem Zeichen ein, je nachdem sie mit T auf derselben Seite ihrer Basis liegen oder nicht, so gilt allgemein die Gleichung

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T.$$

Nennen wir nun die Quotienten

$$\frac{T_1}{T},\ \frac{T_2}{T},\ \frac{T_3}{T},\ \frac{T_4}{T}$$

bezüglich den ersten, zweiten, dritten und vierten Cosinus des Punktes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf das Grundtetraeder und bezeichnen diese Quotienten mit

$$\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m},\ \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m},\ \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m},\ \mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{m},$$

so ist

$$\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m} + \mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{m} = 1.$$

Heissen wir ferner die Ergänzung eines solchen Cosinus zur Einheit den entsprechenden Sinus von $\mathfrak{m}$, sodass

$$1 - \mathrm{Cos}_1 m = \mathrm{Sin}_1 m,$$
$$1 - \mathrm{Cos}_2 m = \mathrm{Sin}_2 m \quad \text{etc,}$$

so ist

$$\mathrm{Sin}_1 m + \mathrm{Sin}_2 m + \mathrm{Sin}_3 m + \mathrm{Sin}_4 m = 3.$$

Es sind übrigens auch diese Sinusse Quotienten aus Theilen des Inhaltes des Grundtetraeders und dem Volumen des ganzen Tetraeders selbst. So ist $\mathrm{Sin}_1 m$ der Quotient aus dem von Dreiecken begrenzten Raum, welcher a, b, c, d, m zu Ecken hat, und der eine dreiseitige Doppelpyramide bildet, dividirt durch das Volumen T.

Auch hier wird die Bedeutung von $\mathrm{Tang}_1 m$, $\mathrm{Cot}_1 m$ etc. keiner weiteren Erklärung bedürfen. Die neuen Functionen kann man zur Unterscheidung von den früheren, falls es nothwendig ist, die stereometrischen oder Raum-Functionen des Punktes m in Bezug auf das Tetraeder a b c d nennen. Jede solche Function lässt sich auf eine longimetrische, d. h. auf den Quotienten zweier Strecken zurückführen. So ist z. B.

$$\mathrm{Sin}_1 m = \frac{a\,m}{a\,a'},$$

wenn a' der Punkt ist, in welchem A von a m durchstochen wird. Die vier verschiedene Sinusse, Cosinusse etc. lassen sich auch auffassen als longimetrische Functionen des Punktes m in Bezug auf die vier Schichten, gebildet von den erweiterten Seiten des Tetraeders und den Ebenen, die durch die Ecken des Grundtetraeders parallel zu den Gegenseiten gehen.

2. — Von stereometrischen Functionen mit demselben Index gelten alle Sätze, die wir von den longimetrischen bewiesen haben.

So ist auch hier z. B.

$$\mathrm{Sin}_1 (m + n) = \mathrm{Sin}_1 m \,\mathrm{Cos}_1 n + \mathrm{Cos}_1 m \,\mathrm{Sin}_1 n + 2\,\mathrm{Sin}_1 m \,\mathrm{Sin}_1 n.$$

Doch muss wieder die Bemerkung gemacht werden, dass $m + n$ zur Giltigkeit dieser Formel die Bedeutung haben muss

$$m + n = a\,m + a\,n,$$

dass also darunter der Punkt zu verstehen ist, den man durch geometrische Addition der Strecken a m und a n erhält. Dagegen ist in

$$\mathrm{Sin}_2 (m + n) = \mathrm{Sin}_2 m \,\mathrm{Cos}_2 n + \mathrm{Cos}_2 m \,\mathrm{Sin}_2 n + 2\,\mathrm{Sin}_2 m \,\mathrm{Sin}_2 n$$
$$m + n = b\,m + b\,n.$$

Da, wo Missverständniss eintreten kann, muss daher statt $m + n$ die ausführlichere Schreibweise $a\,m + a\,n$ oder $b\,m + b\,n$ etc. benutzt werden. Wenn nichts weiter bemerkt ist, verstehen wir unter $m + n$ immer $a\,m + a\,n$.

Auch hier ist (vergl. §. 37, 3)

$$\mathrm{Cos}_2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{n}) = 1 + \mathrm{Cos}_2(\mathfrak{b}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{n}),$$
$$\mathrm{Cos}_3(\mathfrak{a}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{n}) = 1 + \mathrm{Cos}_3(\mathfrak{c}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{c}\,\mathfrak{n}) \text{ etc.}$$

Um diess z. B. von der ersten Formel zu beweisen, denken wir uns $\mathfrak{a}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{n}$ construirt. Gesetzt der so erhaltene Punkt sei $\mathfrak{a}_1$, ebenso führe $\mathfrak{b}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{n}$ zu dem Punkte $\mathfrak{b}_1$. (Vergl. Fig. 19). Dann ist die Strecke $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ parallel und gleich $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, weil $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ Gegenseiten eines Vierecks sind, dessen Diagonalen einander halbiren. Und nun lässt sich leicht zeigen, dass allgemein die beiden Pyramiden mit der Basis B und den Spitzen in $\mathfrak{a}_1$ und in $\mathfrak{b}_1$ um das Grundtetraeder von einander differiren, wodurch sich ergiebt, dass

$$\mathrm{Cos}_2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{a}\,\mathfrak{n}) = 1 + \mathrm{Cos}_2(\mathfrak{b}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{n}).$$

3. — Aehnlich wie man die longimetrischen Functionen als die homogenen Coordinaten eines Punktes auf einer Geraden, die planimetrischen als die homogenen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene betrachten kann, so lassen sich die stereometrischen Functionen eines Punktes als seine vier homogenen Coordinaten in Bezug auf das Fundamentaltetraeder $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ ansehen und gebrauchen.

Um wenigstens an einem Beispiel die Verwendbarkeit der Raumfunctionen zu zeigen, wollen wir die Formel ableiten, wonach das Volumen V eines Tetraeders, dessen Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sind, gleich folgender Determinante ist

$$V = \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}_1\mathfrak{a}, & \mathrm{Cos}_2\mathfrak{a}, & \mathrm{Cos}_3\mathfrak{a}, & \mathrm{Cos}_4\mathfrak{a} \\ \mathrm{Cos}_1\mathfrak{b}, & \mathrm{Cos}_2\mathfrak{b}, & \mathrm{Cos}_3\mathfrak{b}, & \mathrm{Cos}_4\mathfrak{b} \\ \mathrm{Cos}_1\mathfrak{c}, & \mathrm{Cos}_2\mathfrak{c}, & \mathrm{Cos}_3\mathfrak{c}, & \mathrm{Cos}_4\mathfrak{c} \\ \mathrm{Cos}_1\mathfrak{d}, & \mathrm{Cos}_2\mathfrak{d}, & \mathrm{Cos}_3\mathfrak{d}, & \mathrm{Cos}_4\mathfrak{d} \end{vmatrix} \cdot T,$$

wenn T das Volumen des Fundamentaltetraeders $\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{c}_0\,\mathfrak{d}_0$ ist, auf welches die Raumfunctionen bezogen sind.

Es ist (vergl. Balzer, Theorie der Determinanten)

$$6V = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_1, & z_4, & 1 \end{vmatrix} \cdot \sin xy \cdot \sin yz \cdot \sin(xy, yz)$$

das 6fache Volumen eines Tetraeders, dessen Ecken die in dieser Formel enthaltenen schiefwinkligen Coordinaten haben. Nehmen wir nun an, dass der Anfang dieser Coordinaten in der vierten Ecke $\mathfrak{d}_0$ des Grundtetraeders sei, und nennen die Neigungswinkel der Axen x, y und z gegen die Ebenen yz, zx, xy bezüglich ξ, η und ζ, während A, B, C die Flächen des Grundtetraeders an der Ecke $\mathfrak{d}_0$ sind, so ist

$$6V = \begin{vmatrix} A x_1 \sin\xi, & B y_1 \sin\eta, & C z_1 \sin\zeta, & 1 \\ A x_2 \sin\xi, & B y_2 \sin\eta, & C z_2 \sin\zeta, & 1 \\ A x_3 \sin\xi, & B y_3 \sin\eta, & C z_3 \sin\zeta, & 1 \\ A x_4 \sin\xi, & B y_4 \sin\eta, & C z_4 \sin\zeta, & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{\sin xy \,.\, \sin yz \,.\, \sin(xy, yz)}{A\,B\,C \sin\xi \,.\, \sin\eta \,.\, \sin\zeta}.$$

Dividirt man die 3 ersten Colonnen der Determinante mit 3 T, so erhält man

$$6V = \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}_1 a, & \mathrm{Cos}_2 a, & \mathrm{Cos}_3 a, & 1 \\ \mathrm{Cos}_1 b, & \mathrm{Cos}_2 b, & \mathrm{Cos}_3 b, & 1 \\ \mathrm{Cos}_1 c, & \mathrm{Cos}_2 c, & \mathrm{Cos}_3 c, & 1 \\ \mathrm{Cos}_1 b, & \mathrm{Cos}_2 b, & \mathrm{Cos}_3 b, & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{27\,T^3 \sin xy \,.\, \sin yz \,.\, \sin(xy, yz)}{A\,B\,C \sin\xi \,.\, \sin\eta \,.\, \sin\varphi}$$

$$= R \,.\, S.$$

Von R lässt sich zeigen, dass es gleich der Determinante, deren Diagonalglied

$$\mathrm{Cos}_1 a \; \mathrm{Cos}_2 b \; \mathrm{Cos}_3 c \; \mathrm{Cos}_4 b$$

ist, während der Factor S sich auf 6 T reducirt, wenn man T^3 betrachtet als $\frac{1}{6} A s_1 \sin\xi \,.\, B s_2 \sin\eta \,.\, C s_3 \sin\zeta$, wobei s_1, s_2 und s_3 die Kanten an der Ecke b_0 des Grund-Tetraeders sind.

Es ist mithin

$$V = (\mathrm{Cos}_1 a, \; \mathrm{Cos}_2 b, \; \mathrm{Cos}_3 c, \; \mathrm{Cos}_4 b)\, T.$$

Diese Formel bildet mit den beiden anderen, wonach

$$a\,b = \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}_1 a, & \mathrm{Cos}_1 b \\ \mathrm{Cos}_2 a, & \mathrm{Cos}_2 b \end{vmatrix} e,$$

$$a\,b\,c = \begin{vmatrix} \mathrm{Cos}_1 a, & \mathrm{Cos}_1 b, & \mathrm{Cos}_1 c \\ \mathrm{Cos}_2 a, & \mathrm{Cos}_2 b, & \mathrm{Cos}_2 c \\ \mathrm{Cos}_3 a, & \mathrm{Cos}_3 b, & \mathrm{Cos}_3 c \end{vmatrix} \triangle,$$

ein System von Sätzen, demzufolge man den Inhalt des durch zwei, drei oder vier Punkte bestimmten Raumgebildes als Determinante aus den Cosinussen dieser Punkte erhält, wenn man diese Determinante noch mit dem Inhalt des durch die Fundamentalpunkte bestimmten Grundgebildes (Strecke, Dreieck oder Tetraeder) multiplicirt. Natürlich sind im ersten Falle longimetrische, im zweiten Plan-Functionen gemeint.

§. 41. Complexe Zahlen mit Raumfunctionen.

1. — Die longimetrisch complexen Zahlen lassen eine Erweiterung auf viergliedrige Ausdrücke zu mit vier Einheiten, der rellen 1 und drei weiteren, die wir mit j, k, l bezeichnen könnten, die wir aber lieber durch j_1, j_2, j_3 darstellen wollen. Dabei gelten für diese Translationsfactoren die Gleichungen

$$\begin{array}{l|l} j_1^2 = 2j_1 - 1, & j_1 j_2 = j_1 + j_2 - 1, \\ j_2^2 = 2j_2 - 1, & j_2 j_3 = j_2 + j_3 - 1, \\ j_3^2 = 2j_3 - 1, & j_3 j_1 = j_3 + j_1 - 1. \end{array}$$

Das Product $j_1 j_2 j_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 2$
ergiebt sich leicht durch Multiplication einer der letzten drei Gleichungen mit dem darin fehlenden j.

Denken wir uns nämlich innerhalb eines Tetraeders a b c d einen Punkt m, so lässt sich eine Strecke w in demselben zerlegen in die mit ihr Parallelen w_0 und w', von denen erstere in a, letztere in a', d. h. dem Durchstichspunkt der Geraden a m mit A angebracht ist. Bezeichnen wir nun die stereometrischen Cosinusse von m in Bezug auf a, b, c, d mit Cos_0, Cos_1, Cos_2, Cos_3, so ist

$$w_m = w\,(\mathrm{Cos}_0\, m + j\,\mathrm{Sin}_0\, m),$$

wobei j der Verschiebungsfactor von a nach a' ist. Die in a' befindliche Strecke w' lässt sich aber zerlegen in die Summe

$$w' = w_1 + w_2 + w_3,$$

wenn w_1, w_2, w_3 Längen sind, die parallel w' und bezüglich in den Ecken b, c, d angebracht sind. Dieselben verhalten sich, wie die planimetrischen Cosinusse des Punktes a' in Bezug auf das Dreieck b c d. Diese selbst sind aber proportional den gleichnamigen Raumfunctionen des Punktes m in Bezug auf die Ecken b, c, d, wie sich auf folgende Art ergiebt. Es ist

$$w_1 = w\,\mathrm{Sin}_0\, m \,.\, \frac{a'\,b'}{b\,b'} = w\,\mathrm{Sin}_0\, m \,.\, \frac{a\,a'\,c\,d}{a\,b\,c\,d},$$

wenn b' der Punkt ist, wo in der Tetraederseite b c d die Gerade b a' die Kante c d trifft. Es ist aber auch

$$a\,a'\,c\,d : a\,b\,c\,d = m\,a'\,c\,d : m\,b\,c\,d,$$

und hieraus folgt

$$a\,a'\,c\,d : m\,a'\,c\,d = a\,b\,c\,d : m\,b\,c\,d.$$

Durch Subtraction erhält man dann

$$a\,a'\,c\,d : a\,m\,c\,d = a\,b\,c\,d : a\,(b\,c\,d)\,m,$$

oder

$$a\,a'\,c\,d : a\,b\,c\,d = a\,m\,c\,d : a\,(b\,c\,d)\,m$$
$$= \mathrm{Cos}_1\, m : \mathrm{Sin}_0 m.$$

Mithin ist $w_1 = w\,\mathrm{Cos}_1\, m$.

Aehnlich ergeben sich die Werthe von w_2 und w_3 als

$$w_2 = w\,\mathrm{Cos}_2\, m, \quad w_3 = w\,\mathrm{Cos}_3\, m.$$

Bezeichnen wir nun den Verschiebungsfactor von a nach b mit j_1, den von a nach c mit j_2 und den von a nach d mit j_3, so ist jetzt

$$w_m = w\,(\mathrm{Cos}_0\, m + j_1\,\mathrm{Cos}_1\, m + j_2\,\mathrm{Cos}_2\, m + j_3\,\mathrm{Cos}_3\, m).$$

2. — Wir haben hiermit einen Ausdruck gefunden, der uns gestattet, jede im Raume befindliche Strecke w_m auszudrücken als Product aus ihrer absoluten Länge w und einem Factor von der Form

$$\mathrm{Cos}_0\, m + j_1\,\mathrm{Cos}_1\, m + j_2\,\mathrm{Cos}_2\, m + j_3\,\mathrm{Cos}_3\, m,$$

welcher letztere nur von der Lage des Anfangspunktes m der Strecke w abhängt. Er verschiebt wie j_1, j_2 und j_3 von a aus. Doch beschränkt er sich nicht darauf, von a aus weiter zu treiben. Wird eine Strecke mit dem Anfangspunkte in n mit einer solchen neuen Art complexer Zahlen multiplicirt, so wird sie von dort parallel zur Richtung a m und um die Länge a m verschoben, wie sich daraus ergiebt, dass die Moivre'sche Formel auch hier noch einmal Anwendung findet. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}(\mathrm{Cos}_0\, m + j_1 \mathrm{Cos}_1\, m + j_2 \mathrm{Cos}_2\, m + j_3 \mathrm{Cos}_3\, m)\ (\mathrm{Cos}_0\, n + j_1 \mathrm{Cos}_1\, n \\ + j_2 \mathrm{Cos}_2\, n + j_3 \mathrm{Cos}_3\, n) \\ = \mathrm{Cos}_0\,(m+n) + j_1 \mathrm{Cos}_1\,(m+n) + j_2 \mathrm{Cos}_2\,(m+n) \\ + j_3 \mathrm{Cos}_3\,(m+n),\end{aligned}$$

oder kürzer geschrieben

$$\mathrm{C}\, j_{1,2,3}\, \mathrm{S}\,(m) \,.\, \mathrm{C}\, j_{1,2,3}\, \mathrm{S}\,(n) = \mathrm{C}\, j_{1,2,3}\, \mathrm{S}\,(m+n).$$

Wenn kein Missverständniss möglich ist, so kann man auch hier die nun für longimetrische, Plan- und Raum-Functionen giltige Formel benutzen

$$\mathrm{C}\, j\, \mathrm{S}\,(m) \,.\, \mathrm{C}\, j\, \mathrm{S}\,(n) = \mathrm{C}\, j\, \mathrm{S}\,(m+n).$$

Durch wirkliche Ausmultiplication von $\mathrm{C}\, j\, \mathrm{S}\,(m)$ mit $\mathrm{C}\, j\, \mathrm{S}\,(n)$ erhalten wir nämlich 16 Glieder. Wenn wir hierin für j_1^2, j_2^2, j^2_3 und für $j_1 j_2$, $j_2 j_3$ und $j_3 j_1$ ihre Werthe setzen, so erhalten wir von j frei folgende Producte

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cos}_0\, m\, \mathrm{Cos}_0\, n - \mathrm{Cos}_1\, m\, \mathrm{Cos}_1\, n - \mathrm{Cos}_2\, m\, \mathrm{Cos}_2\, n - \mathrm{Cos}_3\, m\, \mathrm{Cos}_3\, n \\ &- \mathrm{Cos}_1\, m\, \mathrm{Cos}_2\, n - \mathrm{Cos}_2\, m\, \mathrm{Cos}_1\, n - \mathrm{Cos}_1\, m\, \mathrm{Cos}_3\, n - \mathrm{Cos}_3\, m\, \mathrm{Cos}_1\, n \\ &- \mathrm{Cos}_2\, m\, \mathrm{Cos}_3\, n - \mathrm{Cos}_3\, m\, \mathrm{Cos}_2\, n \\ &= \mathrm{Cos}_0\, m\, \mathrm{Cos}_0\, n \\ &\qquad - (\mathrm{Cos}_1\, m + \mathrm{Cos}_2\, m + \mathrm{Cos}_3\, m)\ (\mathrm{Cos}_1\, n + \mathrm{Cos}_2\, n + \mathrm{Cos}_3\, n) \\ &= \mathrm{Cos}_0\, m\, \mathrm{Cos}_0\, n - (1 - \mathrm{Cos}_0\, m)\ (1 - \mathrm{Cos}_0\, n) \\ &= \mathrm{Cos}_0\, m\, \mathrm{Cos}_0\, n - \mathrm{Sin}_0\, m\, \mathrm{Sin}_0\, n = \mathrm{Cos}_0\,(m+n).\end{aligned}$$

Von den übrigen Gliedern wollen wir das mit j_1 behaftete zu vereinfachen suchen. Dasselbe ist

$$\begin{aligned}&j_1\,(\mathrm{Cos}_0\, m\, \mathrm{Cos}_1\, n + \mathrm{Cos}_1\, m\, \mathrm{Cos}_0\, n + 2\,\mathrm{Cos}_1\, m\, \mathrm{Cos}_1\, n + \mathrm{Cos}_1\, m\, \mathrm{Cos}_2\, n \\ &+ \mathrm{Cos}_2\, m\, \mathrm{Cos}_1\, n + \mathrm{Cos}_1\, m\, \mathrm{Cos}_3\, n + \mathrm{Cos}_3\, m\, \mathrm{Cos}_1\, n) \\ &= j_1\,[\mathrm{Cos}_1\, m\,(\mathrm{Cos}_0\, n + \mathrm{Cos}_1\, n + \mathrm{Cos}_2\, n + \mathrm{Cos}_3\, n) \\ &\qquad + \mathrm{Cos}_1\, n\,(\mathrm{Cos}_0\, m + \mathrm{Cos}_1\, m + \mathrm{Cos}_2\, m + \mathrm{Cos}_3\, m)] \\ &= j_1\,(\mathrm{Cos}_1\, b\, m + \mathrm{Cos}_1\, b\, n) = j_1\,(2 - \mathrm{Sin}_1\, b\, m - \mathrm{Sin}_1\, b\, n) \\ &= j_1\,[2 - \mathrm{Sin}_1\,(b\, m + b\, n)] = j_1\,[1 + \mathrm{Cos}_1\,(b\, m + b\, n)].\end{aligned}$$

Dieses ist, mit Beachtung der kleinen Aenderung in der Bezeichnung, nach (§. 40, 2) gleich $j_1 \mathrm{Cos}_1\,(a\, m + a\, n)$,

welches wir kürzer $j_1 \mathrm{Cos}_1\,(m+n)$ schreiben.

Aehnlich lassen sich die Coefficienten von j_2 und j_3 zurückführen auf

$$\mathrm{Cos}_2\,(a\, m + a\, n) \text{ und } \mathrm{Cos}_3\,(a\, m + a\, n),$$

so dass damit die Giltigkeit von

$$\mathrm{Cj\,S}\,m \,.\, \mathrm{Cj\,S}\,n = \mathrm{Cj\,S}\,(m+n)$$

auch für Raumfunctionen nachgewiesen ist.

Aus der vorstehenden Formel ergiebt sich durch Ausdehnung auf mehr als zwei Factoren

$$\mathrm{Cj\,S}\,m_1 \,.\, \mathrm{Cj\,S}\,m_2 \,.\,.\,.\,. \,\mathrm{Sj\,S}\,m_p = \mathrm{Cj\,S}\,(m_1 + m_2 + \,.\,.\,.\,. + m_p);$$

und wenn m_1 zusammenfällt mit m_2, m_3 .... m_p, so ist

$$(\mathrm{Cj\,S}\,m)^n = \mathrm{Cj\,S}\,(n\,m) = \mathrm{Cj\,S}\,(n \,.\, a\,m),$$

d. h. die auf Raumfunctionen ausgedehnte Moivre'sche Formel für n als ganze positive Zahl. Die Erweiterung auf gebrochene und negative Werthe des Exponenten bietet keine Schwierigkeiten.

3. — Wir haben in den viergliedrigen complexen Zahlen ein Mittel gefunden, nicht nur um jeden Punkt im Raume durch eine Complexe auszudrücken, denn dafür reichen nöthigenfalls die planimetrischen Functionen schon aus, sondern auch um eine Strecke im Raum, die einer gegebenen Richtung parallel läuft, durch eine Zahl nach Grösse und Stelle darzustellen.

Diese viergliedrigen Zahlen sind allgemein von der Form

$$A + j_1 B + j_2 C + j_3 D$$

und können leicht auf die reducirte oder Normalform

$$w_m = w\,(\mathrm{Cos}_0\,m + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,m + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,m + j_3\,\mathrm{Cos}_3\,m)$$

gebracht werden, worin

$$w = A + B + C + D$$

die Länge der Strecke darstellt, während

$$\mathrm{Cos}_0\,m = \frac{A}{w}, \quad \mathrm{Cos}_1\,m = \frac{B}{w} \quad \text{etc.}$$

ist.

Man kann diese complexen Raumzahlen wegen der Vierzahl ihrer Glieder Quaternionen nennen. Zur Unterscheidung von den durch Hamilton in die Wissenschaft eingeführten viergliedrigen Ausdrücken von der Form

$$A + i_1 B + i_2 C + i_3 D,$$

worin i_1, i_2, i_3 Einheiten sind, die sich von j_1, j_2, j_3 dadurch unterscheiden, dass $i_1^2 = -1$, $i_2^2 = -1$, $i_3^2 = -1$, wollen wir die neuen Zahlen longimetrische Quaternionen heissen, wogegen dann die älteren viergliedrigen complexen Ausdrücke vielleicht als goniometrische Quaternionen bezeichnet werden könnten.

Ist w_m eine Kraft von der Grösse w, die ihren Angriff im Punkte m hat, oder stellt w_m eine Rotationsbewegung von der Geschwindigkeit w dar, deren Rotationsaxe durch den Punkt m geht, so lassen sich diese mechanischen Elemente durch die Quaternion

$$w\,(\mathrm{Cos}_0\,m + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,m + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,m + j_3\,\mathrm{Cos}_3\,m)$$

unzweideutig darstellen.

4. — Die Quaternion

$$\mathrm{Cos}_0 \mathfrak{m} + j_1 \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m} + j_2 \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{m} + j_3 \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{m}$$

kann als eine im Punkte $\mathfrak{m}$ anfangende Strecke von der Längeneinheit angesehen werden. Dieselbe lässt sich aber auch geradezu als die Raumzahl des Punktes $\mathfrak{m}$ auffassen. Um an einem System von Punkten die Darstellung derselben mittelst Quaternionen zu zeigen, denken wir uns ein rechtwinkliges Axensystem, das seinen Anfang im Mittelpunkte eines Würfels hat, und dessen Axen den Kanten des Würfels parallel laufen. Lassen wir die Länge der Würfelkante zwei Einheiten betragen und j_1, j_2, j_3 die Verschiebungsfactoren um die Längeneinheit in der Richtung der positiven x, y und z Axe sein, so sind

$$j_1 \text{ und } j_1^{-1}, \quad j_2 \text{ und } j_2^{-1}, \quad j_3 \text{ und } j_3^{-1}$$

die Zahlen für die Mittelpunkte der Würfelflächen.

Die acht Ecken des Würfels sind dargestellt durch die 8 Producte, die in

$$j_1^{\pm 1} \cdot j_2^{\pm 1} \cdot j_3^{\pm 1}$$

enthalten sind. Will man die Zahlen für die einzelnen Ecken in Quaternionenform haben, so muss man jene Producte in Aggregate verwandeln mit Benutzung der Formeln

$$j_1 j_2 j_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 2,$$
$$j_1^{-1} = 2 - j_1, \; j_2^{-1} = 2 - j_2, \; j_3^{-1} = 2 - j_3$$

und der übrigen zu Anfang von §. 41 gegebenen Ausdrücke.

Es lässt sich übrigens jeder Punkt, dessen auf ein dreiaxiges recht- oder schiefwinkliges Coordinatensystem bezogene Coordinaten x, y und z sind, darstellen durch

$$j_1^{\xi} \cdot j_2^{\eta} \cdot j_3^{\zeta},$$

wenn j_1, j_2 und j_3 die Verschiebungsfactoren auf die Längeneinheiten längs der x, bezüglich der y und z Axe sind, während ξ, η und ζ die Masszahlen dieser Coordinaten bedeuten. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht, wenn man festhält, dass j_1^{ξ} vom Coordinatenanfang um die Länge x auf der x Axe verschiebt. Wird der dort angelangte Punkt mit j_2^{η} multiplicirt, so rückt er in der x y Ebene parallel zur y Axe um die Länge y weiter, um endlich durch Multiplication mit j_3^{ζ} in dem Punkte mit den Coordinaten x, y, z anzugelangen.

Um die den Punkt x y z darstellende Zahl in Quaternionenform zu erhalten, setzt man

$$j_1 = \mathrm{Cos}_0 \mathfrak{b} + j_1 \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} + j_2 \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} + j_3 \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b},$$
$$j_2 = \mathrm{Cos}_0 \mathfrak{c} + j_1 \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{c} + j_2 \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{c} + j_3 \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{c},$$
$$j_3 = \mathrm{Cos}_0 \mathfrak{d} + j_1 \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{d} + j_2 \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{d} + j_3 \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{d},$$

wobei $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ auf den von $\mathfrak{a}$ ausgehenden Axen der x, y und z angenommen sind. Dann potenzirt man mit Benutzung des erweiterten

Moivre'schen Satzes j_1, j_2 und j_3 mit ξ, η und ζ und multiplicirt endlich die drei so erhaltenen Quaternionen. Bei der Multiplication von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ mit ξ, η und ζ, wie diess bei Anwendung des Moivre'schen Satzes nöthig wird, hat man festzuhalten, dass $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ eigentlich Abkürzungen für $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$ sind.

§. 42. Biquaternionen.

1. — Sind uns im Raume Strecken von verschiedener Richtung gegeben, so reichen die longimetrischen Quaternionen nicht mehr aus, um dieselben neben einander darzustellen, wenn zugleich Grösse und Richtung der Strecken und die Stelle des Anfangs derselben erkennbar sein sollen. Wir müssen dann die von Hamilton eingeführten Quaternionen benutzen.

Die Begründung und Erörterung dieser interessanten Zahlgebilde wird erst im zweiten Theil dieses Buches erfolgen; gegenwärtig merken wir uns nur, dass als Normalform für eine Strecke u, die durch den Coordinatenanfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems geht und die sich als die Längen x, y und z auf die Axen projicirt, der Ausdruck gilt

$$i_1 x + i_2 y + i_3 z.$$

Für die Einheiten i_1, i_2 und i_3 gelten die Gleichungen

$$i_1^2 = -1, \quad i_2^2 = -1, \quad i_3^2 = -1,$$

und

$$i_1 i_2 = i_3, \quad i_2 i_3 = i_1, \quad i_3 i_1 = i_2;$$

aber

$$i_2 i_1 = -i_3, \quad i_3 i_2 = -i_1, \quad i_1 i_3 = -i_2.$$

Endlich ist

$$i_1 i_2 i_3 = -1.$$

Multiplicirt man nun die durch den Coordinatenanfang gehende Strecke

$$u = i_1 x + i_2 y + i_3 z$$

mit

$$\mathrm{Cos}_0 m + j_1 \mathrm{Cos}_1 m + j_2 \mathrm{Cos}_2 m + j_3 \mathrm{Cos}_3 m,$$

so erhält man die Strecke u parallel zu sich selbst in den Punkt m geschoben, so dass wir also haben

$$u_m = (i_1 x + i_2 y + i_3 z)\,(\mathrm{Cos}_0 m + j_1 \mathrm{Cos}_1 m + j_2 \mathrm{Cos}_2 m + j_3 \mathrm{Cos}_3 m),$$

oder auch

$$u_m = u\,(i_1 \cos\varphi_1 + i_2 \cos\varphi_2 + i_3 \cos\varphi_3)\,(\mathrm{Cos}_0 m + j_1 \mathrm{Cos}_1 m + j_2 \mathrm{Cos}_2 m + j_3 \mathrm{Cos}_3 m).$$

Der vorstehende Ausdruck, der nur ein besonderer Fall von dem noch allgemeineren Producte

$$(\mathfrak{A}_0 + i_1 \mathfrak{A}_1 + i_2 \mathfrak{A}_2 + i_3 \mathfrak{A}_3)\,(\mathfrak{B}_0 + j_1 \mathfrak{B}_1 + j_2 \mathfrak{B}_2 + j_3 \mathfrak{B}_3)$$

ist, kann wie dieser letzte eine Biquaternion genannt werden, da er das Product einer goniometrischen und einer longimetrischen Quaternion ist.

In entwickelter Form hat eine solche Biquaternion die folgenden Glieder

$$i_1 A_0 + i_1 j_1 A_1 + i_1 j_2 A_2 + i_1 j_3 A_3,$$
$$i_2 B_0 + i_2 j_1 B_1 + i_2 j_2 B_2 + i_2 j_3 B_3,$$
$$i_3 C_0 + i_3 j_1 C_1 + i_3 j_2 C_2 + i_3 j_3 C_3,$$

von denen jedes eine Strecke darstellt, welche in die Richtung einer der Axen fällt — je nach dem Coefficienten i_1, i_2 oder i_3 in die x, y oder z Axe — und die ihren Anfang in a, b, c oder 0 haben, je nachdem kein j oder j_1, j_2 oder j_3 als Factor vorhanden ist. Damit eine solche Biquaternion das Product zweier Quaternionen ist, muss

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0} = \frac{C_1}{C_0},$$
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1},$$
$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{B_3}{B_2} = \frac{C_3}{C_2}$$

sein. Aus diesen Gleichungen folgt nämlich, dass auch

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{B_2}{B_0} = \frac{C_2}{C_0},$$
$$\frac{A_3}{A_0} = \frac{B_3}{B_0} = \frac{C_3}{C_0},$$

und hieraus endlich, dass

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = A_0\left(1 + \frac{A_1}{A_0} + \frac{A_2}{A_0} + \frac{A_3}{A_0}\right),$$
$$B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = B_0\left(1 + \frac{B_1}{B_0} + \frac{B_2}{B_0} + \frac{B_3}{B_0}\right),$$
$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = C_0\left(1 + \frac{C_1}{C_0} + \frac{C_2}{C_0} + \frac{C_3}{C_0}\right)$$

bis auf den Factor A_0, B_0, C_0 einander gleich sind. Daraus folgt aber, dass die drei den Axen parallelen Componenten

$$i_1 (A_0 + j_1 A_1 + j_2 A_2 + j_3 A_3),$$
$$i_2 (B_0 + j_1 B_1 + j_2 B_2 + j_3 B_3),$$
$$i_3 (C_0 + j_1 C_1 + j_2 C_2 + j_3 C_3)$$

alle an demselben Punkte m angebracht sind, sich daher in die Strecke u_m zusammen setzen lassen, wobei der Punkt m durch

$$\mathrm{Cos}_0\, m = \frac{A_0}{A_0 + A_1 + A_2 + A_3} = \frac{A_0}{u},$$
$$\mathrm{Cos}_1\, m = \frac{A_1}{u}, \quad \mathrm{Cos}_2\, m = \frac{A_2}{u}, \quad \mathrm{Cos}_3\, m = \frac{A_3}{u}$$

bestimmt ist.

2. — Finden für eine räumliche Bicomplexe die Bedingungsgleichungen nicht statt, die wir oben aufgezählt haben, so führen die drei longimetrischen Quaternionen, die mit i_1, i_2 und i_3 multiplicirt sind, nicht zu einem, sondern zu drei Punkten m_1, m_2 und m_3, an welchen drei den Axen parallele Strecken angebracht sind. Diese letzteren lassen sich jetzt nicht zu einer Strecke summiren.

Stellen diese Strecken Kräfte dar, so ergeben dieselben eine resultirende Kraft und ein Kräftepaar. Sind dagegen die Strecken Rotationen oder deren Geschwindigkeiten, so führen dieselben, da sie um kreuzende Axen erfolgen auf eine Schraubenbewegung. Da auch eine Kraft und ein Kräftepaar die Elemente einer Schraubenbewegung sind, so können wir auf mechanischem Gebiete allgemein eine Biquaternion, die sich nicht auf das Product zweier Quaternionen longimetrischer und goniometrischer Art zurückführen lässt, als den Ausdruck für eine Schraubenbewegung auffassen und dieser Bicomplexen daher auch den Namen Schrauben- oder helikometrische Function beilegen.

Der Nachweis, dass eine nicht reducirbare Biquaternion in der That der Repräsentant einer Schraubenbewegung ist, lässt sich ausserdem auch hier wieder dadurch führen, dass wir durch Hinzufügen von

$$\begin{array}{ll} i_2 M (1 - j_1), & i_3 N (1 - j_1), \\ i_2 P (j_1 - j_2), & i_3 Q (j_1 - j_2), \\ i_2 R (j_2 - j_3), & i_3 S (j_2 - j_3) \end{array}$$

die gegebenen Quaternionen so umgestalten, dass jetzt die verlangten Bedingungsgleichungen gelten. Zu diesem Zwecke würden wir die Werthe der Unbekannten M, N, P, Q, R, und S aus den neuen Bedingungsgleichungen so bestimmen, dass diese Gleichungen erfüllt werden, z. B. M und N aus

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1 - M}{B_0 + M} = \frac{C_1 - N}{C_0 + N}.$$

Der durch Einführung der obigen Ausdrücke auf das Product zweier Quaternionen reducirbare Ausdruck lässt sich jetzt als eine Strecke u_m auffassen, mithin als eine Kraft oder eine Rotation. Durch Hinzufügen der oben angegebenen Ausdrücke mit umgekehrten Zeichen, wird der Werth der ursprünglichen Biquaternion wieder hergestellt. Die sechs obigen Ergänzungen stellen aber (nach §. 35, 8) Kräfte oder Rotationspaare dar. Dasselbe gilt von diesen Binomen mit umgekehrten Zeichen. Daher ist also unsre ursprüngliche Biquaternion eine Kraft oder Rotation u_m und sechs Kräfte- oder Rotationspaare. Die Resultirende dieser sechs Elemente ist ein Paar, das, zu u_m hinzugefügt, damit die Elemente einer Schraubenbewegung abgiebt.

Von der Erweiterung der Theorie der gemeinen goniometrischen Functionen ausgehend, hat die Untersuchung in den vorstehenden vier Abschnitten zu den allgemeinen goniometrischen, sowie zu den longimetrischen Functionen und deren Erweiterungen, den Plan- und Raumfunctionen geführt. Zugleich sind wir bekannt geworden mit den Drehfactoren j_λ, als der Verallgemeinerung der imaginären Einheit i, d. h. dem Drehfactor von 90 Grad, sowie mit den Grenzwerthen derselben, dem Verschiebungsfactor j_0 und allgemein dem Verschieber j_m.

Obschon wir nun der Multiplication mit diesen Einheiten die einfache Bedeutung einer Drehung oder einer Verschiebung abgewonnen haben, so ist doch das Wesen dieser Grössen als geometrischer Gebilde noch im Unklaren geblieben. Erst in der nun folgenden zweiten Abtheilung der Untersuchung, die sich direct mit der Punkt- und Vectorenrechnung beschäftigen wird, soll u. A. nachgewiesen werden, dass sowohl i wie j_0 durch Strecken dargestellt werden können, deren Unterschied darin liegt, dass die Multiplication einer Strecke mit i^n eine Drehung derselben um n Rechte bewirkt in einer zu dem Einheitsvector i senkrechten Ebene, während allgemein der Factor j^n eine damit multiplicirte Strecke parallel zu sich um n Einheiten von der Länge und in der Richtung von j verschiebt.

Zweite Abtheilung.

Die Rechnung mit Punkten und Vectoren.

Fünfter Abschnitt.

Die goniometrischen Quaternionen.

§. 43. Die Summen und Differenzen von Punkten.

1. — Wenn wir im Folgenden von einfachen und mehrfachen Punkten sprechen, so könnte man letztere mit Möbius sich etwa als solche denken, die mit Gewichten behaftet sind, deren Grösse ein Vielfaches von dem Gewichte ist, welches wir einfachen Punkten beilegen; dass also ein n facher Punkt n . b ein n mal so grosses Gewichtsquantum hat als der einfache Punkt b, während beide an derselben Stelle im Raume gedacht werden. Es ist aber dem geometrischen Character unsrer Untersuchungen entsprechender, wenn wir die Punkte als Vertreter von Strecken auffassen, welche in jenen Punkten ihren Anfang haben. Gleiche Punkte stellen dann Strecken von gleicher Länge dar, die man bei einfachen Punkten etwa gleich der Längeneinheit annehmen kann. Bei der Einfachheit des Punktes — der blossen Stelle im Raum — ist es aber nicht möglich, ihn als Vertreter einer Strecke, d. h. eines Gebildes mit drei Grundeigenschaften, — Länge, Richtung und Ort im Raume — zu betrachten, wenn man nicht die beiden ersteren dadurch gleichsam eliminirt, dass man sie für alle einfachen Punkte als gleich annimmt. Der n fache Punkt n . b vertritt mithin eine Strecke von n Längeneinheiten, die ihren Anfang in b hat und einer gegebenen Richtung parallel läuft.

2. — Unter der Summe der Punkte a und b verstehen wir mit Möbius den zweifachen Punkt 2m, der den Abstand ab halbirt. Damit ist die Gleichung

$$a + b = 2m,$$

oder auch

$$m = \tfrac{1}{2}(a + b)$$

definirt. Aus der Definition über die Summe zweier Punkte folgt zugleich, dass die Addition von Punkten eine commutative Operation ist, d. h. dass

$$a + b = b + a.$$

Unter der Summe

$$m \cdot a + n \cdot b$$

verstehen wir den $m + n$ fachen Punkt c, der den Abstand a b im Verhältniss von n : m theilt, so dass wir also schreiben können

$$m \cdot a + n \cdot b = (m + n)\, c.$$

3. — Die Summe dreier einfacher Punkte

$$a + b + c = 3b$$

führt zu dem dreifachen Punkte b, der im Schwerpunkte des Systems der drei Punkte a, b, c sich befindet, wie sich leicht ergiebt, wenn man erst die Summe

$$a + b = 2c_1$$

bildet und dann

$$2c_1 + c = 3b$$

aufsucht. Da man zu demselben Punkte gelangt, wenn man zuerst

$$b + c = 2a_1$$

und dann

$$2a_1 + a$$

ermittelt, so ist damit zugleich die Giltigkeit des associativen Principes für die Addition nachgewiesen, d. h. es ist die Gleichung giltig

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

4. — Nehmen wir vier beliebig im Raume liegende Punkte a, b, c, b, so ist ihre Summe

$$a + b + c + b = 4e$$

der vierfache mit dem Schwerpunkte der Pyramide a b c b zusammenfallende Punkt 4e, wie sich leicht ergiebt, wenn man zuerst etwa

$$a + b + c = 3b_1$$

sucht und dann

$$3b_1 + b = 4e$$

ermittelt. Ueberhaupt wird jeder auf diese Weise aus n Punkten durch Summation ermittelte Punkt der Schwerpunkt dieses Punktsystems sein. Diess ist denn auch der Grund, warum Möbius in seinem 1827 veröffentlichten Werke, diese ganze Rechnung der Addition und Subtraction von Punkten den barycentrischen Calcul genannt hat, ein Name, den wir zuweilen zur Bezeichnung der Methode auch benützen werden.

5. — Unter der Differenz

$$m \cdot a - n \cdot b$$

verstehen wir einen $m - n$ fachen Punkt c, welcher den Abstand a b im Verhältniss von $-n : m$, d. h. äusserlich im Verhältniss von n : m theilt. Es ist diese Erklärung der Differenz vielfacher Punkte nur eine Folgerung aus der Definition der Summe. Wenn nämlich

$$m \cdot a + n \cdot b = (m + n) \cdot c = p \cdot c,$$

so ist

$$m \,.\, a = p \,.\, c - n \,.\, b,$$

oder

$$p \,.\, c - n \,.\, b = (p - n) \,.\, a,$$

und es ist

$$a\,c : a\,b = n : p.$$

Aus der vorstehenden Erklärung der Differenz vielfacher Punkte folgt, dass

$$b - a$$

das Symbol für einen auf der Graden $a\,b$ im Unendlichen liegenden Punkt von der Grösse oder mit dem Coefficienten Null ist. Man könnte daher $b - a$ auch als Vertreter der Richtung $a\,b$ ansehen, wenn sich nicht durch das Resultat der Addition einer solchen Differenz zu einem dritten Punkte eine andre Auffassung als möglich ergäbe.

Soll die Punktrechnung nämlich in Uebereinstimmung bleiben mit der allgemeinen Arithmetik, so müssen wir annehmen, dass

$$a + (b - a) = b$$

ist. Die Hinzufügung der Differenz $b - a$ zu a verschiebt also den Punkt a nach b, d. h. um die Strecke $a\,b$ nach Grösse und Richtung. Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir das associative Princip als anwendbar auf

$$a + (b - a)$$

erklären. Es ist nämlich dann

$$a + (b - a) = (a + b) - a = 2\,m - a = b.$$

Aber auch durch Addition von $b - a$ zu einem beliebigen anderen Punkte c erhalten wir unter Anwendung des associativen Principes eine Verschiebung des Punktes c um die Strecke $a\,b$. Indem wir nämlich hier und später mit a_1, b_1 und c_1 die Halbirungspunkte der Seiten des Dreiecks $a\,b\,c$ bezeichnen, wobei a_1 auf $b\,c$ etc. liegt, mit a_2, b_2 und c_2 aber die Punkte, die wir erhalten durch Verdoppelung der Mittellinien $a\,a_1$, $b\,b_1$ und $c\,c_1$ über den zweiten Endpunkt derselben hinaus, d. h. die Eckpunkte des dem Dreieck $a\,b\,c$ umschriebenen und zu ihm parallelseitigen Dreiecks $a_2\,b_2\,c_2$, können wir setzen

$$c + (b - a) = (c + b) - a = 2\,a_1 - a = a_2.$$

Es ist aber $c\,a_2$ parallel und gleich $a\,b$. Auf dieselbe Weise könnten wir finden

$$a + (c - b) = (a + c) - b = 2\,b_1 - b = b_2$$

und

$$b + (a - c) = (b + a) - c = 2\,c_1 - c = c_2.$$

In jedem der drei Fälle wird der Punkt, zu welchem die Differenz zweier anderen Punkte addirt wird, um den Abstand dieser Punkte in der Richtung vom Subtrahenden zum Minuenden verschoben.

Durch diese Resultate veranlasst, kann man $\mathfrak{b}-\mathfrak{a}$ auffassen als ein Zeichen für die Strecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, betrachtet nach Grösse und Richtung. Und zwar ist diese Strecke ein Operator, der einen Punkt, zu dem er addirt wird, um diese Strecke verschiebt.

In der Annahme

$$\mathfrak{b}-\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$$

werden wir bestärkt durch folgende Betrachtung. Da parallele und gleichlange Strecken um gleichviel verschieben, so dürfen wir dieselben als gleichwerthig betrachten und daher in dem Parallelogramme $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ setzen

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}=\mathfrak{b}-\mathfrak{c}.$$

Wenn nun einmal dieses Parallelogramm zu einem Rhombus wird und wir denken uns dasselbe immer schmäler werdend, indem der Winkel bei $\mathfrak{a}$ sich der Null nähert, wodurch die vier Seiten in eine Grade fallen, so kommen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ zur Deckung, und wir haben

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}=\mathfrak{b}-\mathfrak{c},$$

oder

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{c}=2\,\mathfrak{b},$$

d. h. das alte Resultat, wonach die Summe zweier Punkte gleich dem Doppelten des Halbirungspunktes ihres Abstandes ist.

6. — Interessant ist auch das Ergebniss, zu dem wir gelangen, wenn wir die Differenz zweier einfachen Punkte zu einem n fachen Punkte fügen.

Es ist nämlich

$$\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{c}+\mathfrak{a}-\mathfrak{b}=\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{d},$$

und zwar liegt $\mathfrak{d}$ auf der durch $\mathfrak{c}$ parallel zu $\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}$ gezogenen Geraden so, dass $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}=\frac{1}{\mathfrak{n}}\,.\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}$ ist. Der Operator $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$, der einen einfachen Punkt um $\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}$ verschiebt, treibt also einen n fachen Punkt nur um den nten Theil dieser Länge aus seiner Lage.

Die Richtigkeit dieses Satzes sieht man leicht an einem Trapeze $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$, worin $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ Gegenecken und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ die parallelen Seiten sind, zugleich sei, wenn in $\mathfrak{c}$ ein n facher Punkt liegt,

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}=\frac{1}{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}.$$

Zieht man nämlich die Diagonalen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$, so ist in deren Schnittpunkt $\mathfrak{e}$ die Summe

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{c}=(\mathfrak{n}+1)\,\mathfrak{e}.$$

Sucht man sodann

$$(\mathfrak{n}+1)\,\mathfrak{e}-\mathfrak{b},$$

so erhält man den Punkt $\mathfrak{d}$, weil

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}:\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\,\mathfrak{e}:\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}=1:\mathfrak{n}+1.$$

Es ist mithin in der That

$$a - b + n \cdot c = n \cdot b,$$

wobei

$$cb = \frac{1}{n} ba \text{ ist.}$$

Stellt also $b - a$ die Strecke ab nach Grösse und Richtung dar, so ergeben sich hieraus leicht die Sätze über die Addition und Subtraction von Strecken, die man mit Hamilton nun Vectoren nennen kann. Wir sparen diese Betrachtungen jedoch für den nächsten §. auf.

7. — Wenn in

$$m a - n b = (m - n) c$$

m grösser ist als n, so erhalten wir einen auf der Seite von a ausserhalb ab liegenden Punkt von der Grösse $m - n$. Ist $m = n$, so liegt der resultirende Punkt im Unendlichen zu beiden Seiten von ab. Ist aber $m < n$, so erhalten wir einen negativen Punkt

$$(m - n) c,$$

der ausserhalb ab auf der Seite von b liegt. Solche negativen Punkte machen keine Schwierigkeit, wenn man sie als Vertreter von Strecken auffasst, (vergl. 1. dieses §.) deren Richtung als negativ bezeichnet werden muss. Derselbe Punkt als positive Grösse wäre durch $(n - m) c$ zu bezeichnen.

Es ist hiernach leicht, die sämmtlichen Sätze der allgemeinen Arithmetik, soweit sich dieselben auf Addition und Subtraction von Aggregaten beziehen, als giltig für die Rechnung mit Punkten nachzuweisen, indem man zeigt, dass beide Seiten einer solchen Gleichung zu demselben Punkte führen.

So ist z. B.

$$\begin{aligned}
(a + b) - c &= a + (b - c) = c_2, \\
(a - b) + c &= a - (b - c) = b_2, \\
-a + (b + c) &= (-a + b) + c = a_2, \\
(a - b) - c &= a - (b + c) = -a_2, \\
(-a + b) - c &= b - (a + c) = -b_2, \\
(-a - b) + c &= c - (a + b) = -c_2,
\end{aligned}$$

wobei den mit Indices versehenen Buchstaben die weiter oben angegebene Bedeutung in Bezug auf das Dreieck abc zukommt.

5. — Sind uns zwei Grundpunkte a und b gegeben, so ist es jetzt möglich, jeden Punkt m der unbegrenzten Geraden ab durch einen Ausdruck von der Form

$$A a + B b$$

darzustellen; man braucht nur für A und B Zahlen zu setzen, welche den

Abständen $\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}$ proportional sind. Setzt man

$$A\,\mathfrak{a} + B\,\mathfrak{b} = (A + B)\,\mathfrak{m},$$

so ist auch

$$\mathfrak{m} = \frac{A}{A+B}\,\mathfrak{a} + \frac{B}{A+B}\,\mathfrak{b}$$
$$= \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{m},$$

wenn die longimetrischen Functionen von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ als Basis bezogen sind. Hieraus folgt z. B., dass zwei Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ symmetrisch gegen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegen, wenn

$$\mathrm{Cos}\,\mathfrak{m} = \mathrm{Sin}\,\mathfrak{n},$$

dass sie harmonische Punkte sind zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wenn

$$\mathrm{Tg}\,\mathfrak{m} = -\,\mathrm{Tg}\,\mathfrak{n},$$

und dass das Doppelverhältniss der vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf der Geraden $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ ausgedrückt ist durch

$$\mathrm{Tg}\,\mathfrak{c} : \mathrm{Tg}\,\mathfrak{d},$$

wenn $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ als die Basis angenommen wird für die longimetrischen Functionen.

Sind die Coefficienten an $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Functionen einer Variabeln t, so erhält man verschiedene Punkte, je nachdem man t verschiedene Werthe beilegt, und man kann nach dem Gesetz der Bewegung eines solchen Punktes fragen, falls t die Zeit bedeutet.

6. — Sind drei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ in einer Ebene gegeben, so stellt

$$A\,\mathfrak{a} + B\,\mathfrak{b} + C\,\mathfrak{c} = (A + B + C)\,\mathfrak{d}$$

jeden beliebigen Punkt der durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bestimmten Ebene dar, je nachdem man die Coefficienten A, B und C annimmt. Diese Gleichung lässt sich auch auf die Form

$$\frac{A}{S}\,\mathfrak{a} + \frac{B}{S}\,\mathfrak{b} + \frac{C}{S}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$$

bringen, wenn $S = A + B + C$ ist. Zugleich lässt sich zeigen, dass diese letztere Form identisch ist mit

$$\mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{d} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{d} = \mathfrak{d},$$

wenn die links stehenden Cosinusse die planimetrischen Functionen von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ sind. Es ist z. B., wenn a, b und c die Seiten des Fundamentaldreiecks bedeuten,

$$a\,.\,\mathfrak{a} + b\,.\,\mathfrak{b} + c\,.\,\mathfrak{c} = (a + b + c)\,\mathfrak{d}$$

der Ausdruck für den Schnittpunkt der drei Winkelhalbirenden. Andre solche Punkte ergeben sich, wenn man in §. 25 der ersten Abtheilung, die dortigen Gleichungen direct als Ausdrücke für Punkte betrachtet, so dass z. B.

$$a\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha + b\,.\,\mathrm{tg}\,\beta + c\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma)\,\mathfrak{d}$$

der Ausdruck für den Schnittpunkt der drei Höhen ist.

Sind die Coefficienten A, B und C in

$$A\,\mathfrak{a} + B\,\mathfrak{b} + C\,\mathfrak{c}$$

Functionen einer Variabeln t, so erhält man eine continuirliche Reihe von Punkten, welche in einer Geraden liegen, wenn diese Functionen von der Form

$$a + b\,t$$

sind, die dagegen Curven bilden, wenn diese Functionen nicht lineär nach t sind.

Die Kegelschnitte haben Coefficienten von der Form

$$a + b\,t + c\,t^2,$$

so dass der allgemeine Ausdruck für die Punkte dieser Curven

$$(a_1 + b_1\,t + c_1\,t^2)\,\mathfrak{a} + (a_2 + b_2\,t + c_2\,t^2)\,\mathfrak{b} + (a_3 + b_3\,t + c_3\,t^2)\,\mathfrak{c}$$

ist. Durch Verlegung der Fundamentalpunkte erhält man

$$\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{b} + t^2\mathfrak{c},$$
$$^1/_4\,\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{b} + t^2\mathfrak{c},$$
$$-\,\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{b} + t^2\mathfrak{c},$$

als einfachere Ausdrücke für Ellipse, Parabel und Hyperbel.

Wie mit Hilfe dieser Ausdrücke die Curven untersucht werden können, ist in dem barycentrischen Calcul von Möbius trefflich erörtert, auf den wir daher hier verweisen wollen.

Sind dagegen A, B und C Functionen von zwei Variabeln t und u, so gelangt man zu Umhüllungscurven.

7. — Sind vier Fundamentalpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ im Raume gegeben, die nicht in einer Ebene liegen, so führt

$$A\,\mathfrak{a} + B\,\mathfrak{b} + C\,\mathfrak{c} + D\,\mathfrak{d} = S\,\mathfrak{e},$$

worin $S = A + B + C + D$ ist, stets zu einem fünften Punkte $\mathfrak{e}$, und es kann umgekehrt zu jedem Punkte $\mathfrak{m}$ im Raum sein barycentrischer Ausdruck gefunden werden, wenn man nur als Coefficienten Werthe einführt, welche den Pyramiden proportional sind, die sich dadurch ergeben, dass man den Punkt $\mathfrak{m}$ mit den vier Ecken des Grundtetraeders verbindet. Dabei sind die Coefficienten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ jedesmal proportional denjenigen Pyramiden, die $\mathfrak{m}$ zur Spitze und die entsprechenden Gegenseiten des Grundtetraeders zur Basis haben. Hieraus ergiebt sich dann, dass wir auch schreiben können

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{m}.$$

Der Mittelpunkt der dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel hat z. B. zu Coefficienten Werthe, welche den Gegenseiten der Ecken proportional sind.

Lassen wir auch hier die Coefficienten an $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ variabel werden, etwa dadurch, dass wir dieselben als Functionen von t ausdrücken, so erhält man eine Folge von Punkten, die bei continuirlicher Aenderung des t eine räumliche Curve ergeben. Ist t wieder die Zeit, so lässt sich die Bewegung des dargestellten Punktes untersuchen.

Sind die Coefficienten an $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ dagegen Functionen zweier Variabeln u und t, so erhalten wir bei stetiger Aenderung derselben als Ort der Punkte im Allgemeinen eine Fläche, wie man findet, wenn man dem u zuerst einen bestimmten Werth beilegt und dann t sich continuirlich verändert denkt. Dadurch erhält man eine räumliche Curve. Eine continuirliche Aenderung des u ergiebt nun eine Reihe dieser Curven, deren Gesammtheit eine Fläche darstellt.

Der Ausdruck für eine Ebene ist allgemein von der Form

$$(a + a_1 t + a_2 u)\,\mathfrak{a} + (b + b_1 t + b_2 u)\,\mathfrak{b} + (c + c_1 t + c_2 u)\,\mathfrak{c} + (d + d_1 t + d_2 u)\,\mathfrak{d},$$

der sich aber vereinfacht, wenn man als Bestimmungsstücke der Lage der Ebene drei ihrer Schnittpunkte mit den durch die Grundpunkte bestimmten Geraden nimmt. Dadurch gelangt man zu einem Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{b} + u\,\mathfrak{c} + (p + q\,t + r\,u)\,\mathfrak{d},$$

worin p, q und r Constanten sind; dagegen ist

$$\mathfrak{a} + t\,\mathfrak{b} + u\,\mathfrak{c} + (p\,t^2 + q\,t\,u + r\,u^2)\,\mathfrak{d}$$

ein Ausdruck für Flächen zweiter Ordnung.

8. — Um an einem Beispiel die Verwendbarkeit des barycentrischen Calculs zu zeigen, wollen wir die harmonischen Beziehungen nachweisen, die sich bei einem System von vier Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ in einer Ebene ergeben.

Verbinden wir den Punkt $\mathfrak{d}$ in der Ebene des Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ mit den Ecken desselben, so wollen wir die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ mit bezüglich den Geraden $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ bezeichnen. Ferner seien die Schnittpunkte von

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1, \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \text{ und } \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$$

bezeichnet mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$, während $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{c}_2$ die Schnittpunkte zwischen

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \text{ und } \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1; \quad \mathfrak{b}\,\mathfrak{b} \text{ und } \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{a}_1; \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{b} \text{ und } \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$$

sind. Dann ist

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{d} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{d},$$

wenn diese Cosinusse auf das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ bezogen sind.

Aus dieser Gleichung folgt

$$\mathfrak{d} - \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{d} = \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{d} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{d}.$$

Die linke Seite stellt einen Punkt auf $\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$ dar, die rechte einen Punkt auf $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, folglich ist jede dieser Seiten ein Ausdruck für $\mathfrak{a}_1$.

Es ist daher

$$\mathfrak{a}_1\,(\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{d} + \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{d}) = \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{d} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{d},$$

wobei $\mathfrak{a}_1$ mit dem Factor $\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{d} + \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{d}$ behaftet ist, weil allgemein

$$A\,\mathfrak{a} + B\,\mathfrak{b}$$

einen Punkt $(A + B)\,\mathfrak{m}$ darstellt.

Da $\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} + \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} = 1 - \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} = \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{b}$ ist, so können wir setzen

$$\mathfrak{a}_1 \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b}$$

und demnach auch

$$\mathfrak{b}_1 \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{c}_1 \mathrm{Sin}_3 \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b}.$$

Durch Subtraction ergiebt sich aus den drei letzten Gleichungen

$$\mathfrak{a}_1 \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{b} - \mathfrak{b}_1 \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{b}_1 \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{b} - \mathfrak{c}_1 \mathrm{Sin}_3 \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} - \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{c}_1 \mathrm{Sin}_3 \mathfrak{b} - \mathfrak{a}_1 \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} - \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b}.$$

Jede Seite der ersten dieser neuen Gleichungen stellt den Punkt $\mathfrak{g}$ dar, als Schnitt von $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$; seine Gleichung lautet daher

$$\mathfrak{g} (\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b}.$$

Aus den beiden anderen Gleichungen folgt

$$\mathfrak{e} (\mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b}) = \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} - \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{f} (\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} - \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b}.$$

Hieraus ergiebt sich aber, dass $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{e}$ die Seite $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ harmonisch theilen, da sie den Abstand $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ im Verhältniss $\pm (\mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} : \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b})$ theilen.

Ebenso sind $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{g}$ harmonische Theilpunkte der Seiten $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Ferner ist das Product der longimetrischen Tangenten

$$\mathrm{Tg}\, \mathfrak{a}_1 . \mathrm{Tg}\, \mathfrak{b}_1 . \mathrm{Tg}\, \mathfrak{c}_1 = 1,$$

wenn jede dieser drei Tangenten auf diejenige Seite als Basis bezogen ist, worauf der betreffende Punkt liegt. Anders ausgedrückt lautet dieser Satz

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 . \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 . \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b} . \mathfrak{b}_1\mathfrak{c} . \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}.$$

Da ferner durch Addition sich ergiebt

$$\mathfrak{e} (\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b}) + \mathfrak{f} (\mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b}) + \mathfrak{g} (\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b}) = 0,$$

so liegen die drei Pnnkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ in einer Geraden. Da die Coefficienten an $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ in dieser Gleichung zugleich die Verhältnisszahlen ergeben, in denen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ die Dreiecksseiten theilen, so findet man daraus, dass

$$\mathfrak{b}\mathfrak{e} . \mathfrak{c}\mathfrak{f} . \mathfrak{a}\mathfrak{g} = - \mathfrak{b}\mathfrak{g} . \mathfrak{c}\mathfrak{e} . \mathfrak{a}\mathfrak{f}$$

ist.

Durch Addition je zweier der Gleichungen für $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ erhalten wir

$$\mathfrak{a}_1 \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{b} + \mathfrak{b}_1 \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} + 2\mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{b}_1 \mathrm{Sin}_2 \mathfrak{b} + \mathfrak{c}_1 \mathrm{Sin}_3 \mathfrak{b} = 2\mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{c}_1 \mathrm{Sin}_3 \mathfrak{b} + \mathfrak{a}_1 \mathrm{Sin}_1 \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} + 2\mathfrak{b} \mathrm{Cos}\, \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b} \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b}.$$

Ein Blick auf diese Gleichungen zeigt, dass sie die Punkte $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_2$ darstellen. Eine Vergleichung von $\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b}$ ergiebt ferner, dass $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ harmonische Punkte zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind. Daher

wird auch $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, sowie endlich $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ harmonisch getheilt.

9. — Auch die Beziehungen, die sich für fünf Punkte im Raume ergeben, lassen sich mit Hilfe räumlicher Functionen durch den barycentrischen Calcul leicht nachweisen.

Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ diese fünf Punkte, von denen wir keine vier in derselben Ebene voraussetzen. Dann ist

$$(1.)\qquad \mathfrak{e} = \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e},$$

wenn rechts die Raumfunctionen des Punktes $\mathfrak{e}$ in Bezug auf das Tetraeder $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ genommen sind. Aus dieser Gleichung folgt

$$(2.)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{e} - \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{a}_1\,\mathrm{Sin}_1\,\mathfrak{e} = \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e},\\
\mathfrak{e} - \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{b}_1\,\mathrm{Sin}_2\,\mathfrak{e} = \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e},\\
\mathfrak{e} - \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{c}_1\,\mathrm{Sin}_3\,\mathfrak{e} = \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e},\\
\mathfrak{e} - \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{d}_1\,\mathrm{Sin}_4\,\mathfrak{e} = \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e},
\end{aligned}$$

wenn wir mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{d}_1$ die Durchstichspunkte der von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ nach $\mathfrak{e}$ gezogenen Geraden mit den Gegenflächen A, B, C, D des Tetraeders bezeichnen. Dass aber z. B. jede der beiden Seiten von

$$\mathfrak{e} - \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} = \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e}$$

den Punkt $\mathfrak{a}_1$ ergiebt, folgt daraus, dass die linke Seite einen Punkt auf $\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}$, die rechte einen Punkt in der Ebene $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ darstellt, mithin beide den Durchstich von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}$ mit A. Aehnlich erweist man die Richtigkeit der Gleichungen für $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{d}_1$.

Aus den Gleichungen (2.) ergeben sich leicht die Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{e} - \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} - \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} = \mathfrak{f}_1\,(\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} + \mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{e} - \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} - \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} = \mathfrak{g}_1\,(\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{e} - \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} - \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} = \mathfrak{h}_1\,(\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} + \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{e} - \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} - \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} = \mathfrak{i}_1\,(\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{e} - \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} - \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} = \mathfrak{k}_1\,(\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{e} - \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} - \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} = \mathfrak{l}_1\,(\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} + \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e}).
\end{aligned}$$

Dieselben stellen jede einen Punkt dar, der auf einer durch $\mathfrak{e}$ und eine Kante des Tetraeders gelegten Ebene und zugleich auf der Gegenkante jener Kante liegt. So ist z. B. $\mathfrak{f}_1$ auf der Ebene $\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ und in der Kante $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ gelegen.

Verbinden wir dagegen die Gleichungen in (2.) durch Subtraction, so erhalten wir

$$(4.)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{a}_1\,\mathrm{Sin}_1\,\mathfrak{e} - \mathfrak{b}_1\,\mathrm{Sin}_2\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} - \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} = \mathfrak{l}_2\,(\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} - \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{b}_1\,\mathrm{Sin}_2\,\mathfrak{e} - \mathfrak{c}_1\,\mathrm{Sin}_3\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} - \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} = \mathfrak{h}_2\,(\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} - \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{c}_1\,\mathrm{Sin}_3\,\mathfrak{e} - \mathfrak{d}_1\,\mathrm{Sin}_4\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} - \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} = \mathfrak{f}_2\,(\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} - \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{d}_1\,\mathrm{Sin}_4\,\mathfrak{e} - \mathfrak{a}_1\,\mathrm{Sin}_1\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} - \mathfrak{d}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} = \mathfrak{i}_2\,(\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} - \mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{a}_1\,\mathrm{Sin}_1\,\mathfrak{e} - \mathfrak{c}_1\,\mathrm{Sin}_3\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{c}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} - \mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e} = \mathfrak{k}_2\,(\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{e} - \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{e})\\
\mathfrak{b}_1\,\mathrm{Sin}_3\,\mathfrak{e} - \mathfrak{b}_1\,\mathrm{Sin}_4\,\mathfrak{e} &= \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} - \mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e} = \mathfrak{g}_2\,(\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{e} - \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{e}).
\end{aligned}$$

Es liegt dabei jeder der Punkte $f_2, g_2, \ldots l_2$ auf einer Tetraederkante mit bezüglich $f_1, g_1 \ldots l_1$, und es theilen jedesmal zwei solche Punkte die zugehörige Kante harmonisch, da die Theilung von $a\,b$ z. B. im Verhältniss von

$$\pm (\mathrm{Cos}_2 e : \mathrm{Cos}_1 e)$$

stattfindet.

Aus dem Gleichungssysteme (4.) folgt durch Addition der vier ersten Gleichungen

$$L \,.\, l_2 + H \,.\, h_2 + I \,.\, i_2 + F \,.\, f_2 = 0,$$

d. h. die Punkte f_2, h_2, i_2 und l_2 liegen in einer Ebene. Diess sind aber die vier äusseren harmonischen Punkte auf den Seiten des räumlichen Streckenzuges (windschiefen Vierkantes) $a\,b$, $b\,c$, $c\,b$, $b\,a$.

Ebenso lässt sich nachweisen, dass die äusseren harmonischen Punkte, die auf den anderen aus den Kanten des Tetraeders bildbaren Vierkanten sind, zu je vier in einer Ebene liegen.

Die vorstehenden Betrachtungen werden zeigen, mit welcher Leichtigkeit der barycentrische Calcul unter Benutzung der Plan- und Raumfunctionen von Punkten bei geometrischen Untersuchungen zu Resultaten führt. Die meisten vorstehenden Sätze ergeben sich nämlich aus der Gleichung des vierten resp. fünften Punktes durch einfache Transposition einzelner Glieder dieser Gleichung.

10. — Die Aufgabe der Vertauschung der Grundpunkte a, b oder a, b, c, oder endlich a, b, c, b, d. h. die Operation, die bei Coordinaten der Aenderung des Coordinatensystems entspricht, lässt sich leicht ausführen. Ist z. B.

$$m = A\,a + B\,b + C\,c,$$

und man will m beziehen auf drei Punkte p, q und r, deren Lagen aber in Bezug auf a, b und c durch Gleichungen gegeben sind, so braucht man nur aus

$$\begin{aligned} p &= a\,\mathrm{Cos}_1 p + b\,\mathrm{Cos}_2 p + c\,\mathrm{Cos}_3 p, \\ q &= a\,\mathrm{Cos}_1 q + b\,\mathrm{Cos}_2 q + c\,\mathrm{Cos}_3 q, \\ r &= a\,\mathrm{Cos}_1 r + b\,\mathrm{Cos}_2 r + c\,\mathrm{Cos}_3 r \end{aligned}$$

a, b und c zu entwickeln und ihre Ausdrücke in p, q und r in die Gleichung für m einzusetzen, um einen Ausdruck für m zu erhalten, worin p, q und r die Fundamentalpunkte sind.

Aehnlich verfährt man bei Vertauschung des Grundtetraeders mit einem neuen System von vier Grundpunkten.

Auch der Uebergang von der barycentrischen Methode der Bestimmung von Punkten zu der mittelst homogener Coordinaten bietet keine Schwierigkeit. Ist

$$m = a\,\mathrm{Cos}_1 m + b\,\mathrm{Cos}_2 m + c\,\mathrm{Cos}_3 m + b\,\mathrm{Cos}_4 m$$

gegeben, so ist

$$\mathrm{Cos}_1 m = \frac{A x_1}{A x_1 + B x_2 + C x_3 + D x_4},$$

wenn A, B, C, D die Seitenflächen des Grundtetraeders und x_1, x_2, x_3, x_4 die von m auf dieselben gefällten Lothe bedeuten. Mit Benutzung der analogen Ausdrücke für $\mathrm{Cos}_2 m$, $\mathrm{Cos}_3 m$, $\mathrm{Cos}_4 m$ erhält man vier Gleichungen, aus denen man die homogenen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 von m ermitteln kann.

Sind umgekehrt die homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Punktes m gegeben, so ist es leicht, die Coefficienten $\mathrm{Cos}_1 m$, $\mathrm{Cos}_2 m$ etc. zu berechnen und mit ihrer Hilfe den barycentrischen Ausdruck von m in Bezug auf das Grundtetraeder aufzustellen.

§. 44. Addition und Subtraction von Vectoren.

1. — Aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition einer Strecke ab als der Differenz der Punkte b und a, d. h.

$$ab = b - a,$$

ergeben sich nun leicht die Gesetze, nach welchen mit diesen Strecken die Addition und Subtraction vollführt wird. Eine solche Strecke werden wir einen Vector nennen, und zu ihrer Bezeichnung mit Hamilton vorwiegend griechische Buchstaben gebrauchen. Dem Vector $o\alpha$, den wir mit α bezeichnen wollen, kommt nun ausser der Richtung, die durch die Bewegung in gerader Linie von o nach α bestimmt wird, eine Länge zu, die wir mit $o\alpha$ bezeichnen können, zu deren Benennung wir aber oft entsprechende lateinische Buchstaben, also hier a, benutzen werden. Später werden wir die Masszahl der Länge von α mit $T\alpha$ bezeichnen, und diess Tensor von α lesen, während wir eine Einheitslänge in der Richtung von α mit $U\alpha$ bezeichnen und diess den Versor von α heissen, so dass α selbst nach Grösse und Richtung dargestellt ist durch

$$\alpha = a\,U\alpha = T\alpha \,.\, U\alpha = U\alpha \,.\, T\alpha.$$

2. — Aus

$$b - a = ab$$

und

$$c - b = bc$$

folgt

$$ab + bc = b - a + c - b = c - a = ac,$$

wenn wir annehmen, dass die Lehren der allgemeinen Arithmetik auch für diese Differenzen gelten. Es ist also die Summe zweier Vectoren, welche zwei aufeinander folgende Seiten eines Dreiecks bilden, gleich der dritten Seite, durchlaufen in dem Sinne vom Anfang des ersten Vectors zum Endpunkte des zweiten.

Aus

$$ab + bc = ac$$

folgt

$$ac - ab = bc,$$

d. h. die Differenz zweier Dreiecksseiten, die von demselben Eckpunkte ausgehen, ist gleich der dritten Dreiecksseite, durchlaufen vom Ende des Subtrahenden nach dem Ende des Minuenden.

3. — Vectoren von gleicher Länge und Richtung, d. h. gleich lange und parallele Vectoren, werden als gleichwerthig betrachtet, da durch Addition derselben zu einem Punkte dieser um gleiche Längen und in derselben Richtung verschoben wird. Anstatt daher in dem Parallelogramme $abcb$ zu sagen

$$ab + bc = ac,$$

kann man auch setzen

$$ab + ab = ac,$$

d. h. die Summe zweier aneinander liegender Seiten eines Parallelogrammes ist gleich der dazwischen liegenden Diagonale.

Der Widerspruch, in welchem diese Sätze mit bekannten Lehren der Geometrie über die Summe und Differenz zweier Dreiecksseiten im Vergleich zur dritten Seite stehen, wird durch folgende Bemerkung beseitigt. In den vorstehenden Gleichungen ist sowol das Plus- und Minus-, wie auch das Gleichheitszeichen in einem etwas weiteren Sinne gebraucht als sonst in der Geometrie. Die Gleichung

$$ab + bc = ac$$

ist jetzt zu lesen und aufzufassen als: zu einer Bewegung (Translation) um die Länge und in der Richtung ab wird eine Bewegung um die Länge und in der Richtung bc gefügt; das Resultat ist gleichwerthig mit einer Bewegung in der Richtung und um die Länge ac. Diese Auffassung eines Vectors macht es nun auch erklärlich, wie durch Addition eines solchen Operators zu einem Punkte, dieser Punkt um die Länge und in der Richtung des Vectors verschoben wird.

4. — Da

$$ab + ba = aa = 0$$

ist, so haben wir

$$ba = -ab,$$

d. h. ba hat dieselbe Länge aber entgegengesetzte Richtung wie ab.

Da ferner

$$ab + bc = ac,$$

so ist in einem Dreiecke

$$ab + bc + ca = ac + ca = 0.$$

Daraus lässt sich leicht für ein ebenes oder ein räumliches Polygon ableiten, dass

$$ab + bc + cb + \ldots + mn + na = 0.$$

5. — Wir haben gleichstimmig parallele Vectoren von gleicher Länge als gleichwerthig angesehen. Dagegen können Vectoren von verschiedener Richtung, auch wenn sie gleiche Längen haben, nie einander gleich gesetzt werden. Aus der Gleichung

$$m\alpha + n\beta = 0$$

folgt daher, wenn α und β Vectoren von verschiedener Richtung sind, dass $m = 0$ und $n = 0$ ist. Und aus der Gleichung

$$m\alpha + n\beta = p\alpha + q\beta$$

ergiebt sich bei derselben Voraussetzung nothwendigerweise, dass $m = p$ und $n = q$ ist.

6. — Die Addition und Subtraction von Vectoren sind commutative und associative Operationen. Denn in dem Parallelogramme $abcb$ ist

$$ab + bc = ab + bc = ac.$$

Da aber wegen Gleichheit an Grösse und Richtung

$$ab = bc,$$
$$bc = ab,$$

so ist

$$ab + bc = bc + ab,$$

womit die Vertauschbarkeit der Posten, d. h. die Giltigkeit des commutativen Principes nachgewiesen ist für die Addition von Vectoren.

In dem ebenen oder räumlichen Streckenzug

$$ab + bc + cb = ab$$

ist

$$ab + bc = ac$$

und

$$ac + cb = ab.$$

Es ist aber auch

$$bc + cb = bb$$

und

$$ab + bb = ab,$$

d. h. es ist

$$(ab + bc) + cb = ab + (bc + cb) = ab,$$

womit das associative Princip als anwendbar bei der Addition von Vectoren bewiesen ist.

7. — Wie die barycentrische Methode leicht Mittel gab, um die Coordinatensysteme des Punktes zu ersetzen, so lässt sich auch die Vectorenmethode benutzen, um Gleichungen für Punktsysteme aufzustellen.

Bezeichnen wir den von einem festen Punkte o aus gezogenen Vector eines Punktes m mit ϱ, und ist

$$\varrho = m\alpha,$$

so liegt m auf einer durch o zu dem Vector α parallel gezogenen Geraden, in einem Abstande von o, der gleich $m \cdot a$ Einheiten ist, wenn a den Tensor von α darstellt.

Ist dagegen

$$\varrho = x\alpha,$$

und stellt x einen variabeln Werth vor, der alle positiven und negativen reellen Zahlen durchlaufen kann, so ist ϱ der Vector der Punkte einer zu α parallelen unbegrenzten Geraden, oder $\varrho = x\alpha$ ist die Gleichung dieser Geraden.

Sind α und β zwei verschiedene Vectoren, die wir der Einfachheit wegen mit ϱ in o anfangen lassen, so ist

$$\varrho = \alpha + x\beta$$

der Vector der Punkte einer Geraden, welche parallel zu β durch den Endpunkt von α geht. Denn für $x = 0$ erhalten wir $\varrho = \alpha$. Jedes andre x dagegen ergiebt für ϱ den Werth α plus einer von dem Ende von α aus parallel zu β abgetragene Strecke; die Gesammtheit der so erlangten Punkte ist die genannte Gerade.

Soll eine Gerade durch die Endpunkte der Vectoren α und β gehen, so ist für jeden ihrer Punkte entweder

$$\varrho = \alpha + x(\beta - \alpha), \quad \text{oder} \quad \varrho = \beta + y(\alpha - \beta),$$

wo die zweite Gleichung sich aus der ersten dadurch ergiebt, dass man $x = 1 - y$ setzt.

Die Richtigkeit beider Gleichungen kann man sich auf verschiedene Arten klar machen. So stellt die erste eine Gerade dar, die durch den Endpunkt von α geht, parallel zu dem Vector $\beta - \alpha$, während die zweite Gleichung eine Gerade bezeichnet, die von dem Ende von β parallel zu dem Vector $\alpha - \beta$ geht; die Identität beider Geraden ergiebt sich leicht.

Aus Vorstehendem folgt, dass die Gleichung einer Geraden, die durch die Enden von α und β geht, im Allgemeinen von der Form

$$A\alpha + B\beta + C\varrho = 0$$

ist, wenn für die Coefficienten A, B, C die Beziehung gilt

$$A + B + C = 0.$$

Besteht diese Gleichung nicht, so stellt der vorhergehende Ausdruck allgemein eine Gerade nur dann dar, wenn die Coefficienten von α und β in

$$\varrho = p\alpha + q\beta$$

lineäre Functionen einer Variabeln sind. Es ist auch allgemein

$$\varrho = p\alpha + q\beta + r\gamma + \ldots + s\delta,$$

wobei α, β, γ, δ Vectoren derselben Ebene, d. h. complanare Vectoren darstellen, die von dem Punkte o aus gezogen sind, eine Gerade, wenn die Coefficienten p, q, r ... s Functionen ersten Grades irgend einer Veriabeln x sind. Denn alle diese Vectoren lassen sich auf zwei derselben, z. B. auf α und β zurückführen, und dann ist die letzte Gleichung auf die Form der vorletzten gebracht.

8. — Die in der vorigen Nummer gegebenen Resultate lassen sich leicht mit Hilfe der longimetrischen Functionen folgendermassen gewinnen.

Nimmt man auf der Richtung von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ einen festen Punkt $\mathfrak{o}$ an und seien die auf $\mathfrak{o}$ als Anfang bezogenen Vectoren der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit α und β bezeichnet, so gilt für jeden weitern Punkt $\mathfrak{m}$, dessen von $\mathfrak{o}$ aus gerechneter Vector mit ϱ bezeichnet ist,

$$\varrho - \alpha : \beta - \varrho = \operatorname{Sin}\mathfrak{m} : \operatorname{Cos}\mathfrak{m} = \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m} : \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m}.$$

Dabei ist $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ als Basis der Functionen betrachtet, und es ist zur Gleichförmigkeit mit der Bezeichnung der Plan- und Raumfunctionen der $\operatorname{Sin}\mathfrak{m}$ mit $\operatorname{Cos}_2\mathfrak{m}$, $\operatorname{Cos}\mathfrak{m}$ aber als $\operatorname{Cos}_1\mathfrak{m}$ bezeichnet. Dann ist allgemein

$$\varrho_{\mathfrak{m}} = \alpha \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} + \beta \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m}.$$

Fällt dabei $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{o}$, so reducirt sich die Gleichung auf

$$\varrho_{\mathfrak{m}} = \alpha \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m},$$

deren Richtigkeit sich leicht ergiebt, da jetzt

$$\operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{T}\varrho}{\mathfrak{T}\alpha}$$

ist. Diese Gleichung ist aber identisch mit

$$\varrho = \mathfrak{x}\,\alpha.$$

9. — Ist ferner $\mathfrak{m}$ ein Punkt in der Ebene des Grund-Dreiecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, so ist

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \cdot \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{b} \cdot \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m} + \mathfrak{c} \cdot \operatorname{Cos}_3\mathfrak{m}.$$

Zieht man hiervon ab die identische Gleichung

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o} \cdot \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{o} \cdot \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m} + \mathfrak{o} \cdot \operatorname{Cos}_3\mathfrak{m},$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{m} - \mathfrak{o} = (\mathfrak{a} - \mathfrak{o}) \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} + (\mathfrak{b} - \mathfrak{o}) \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m} + (\mathfrak{c} - \mathfrak{o}) \operatorname{Cos}_3\mathfrak{m},$$

oder in Vectoren

$$\mathfrak{o}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\,\mathfrak{a} \cdot \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} + \mathfrak{o}\,\mathfrak{b} \cdot \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m} + \mathfrak{o}\,\mathfrak{c} \cdot \operatorname{Cos}_3\mathfrak{m},$$

oder endlich

$$\varrho_{\mathfrak{m}} = \alpha \cdot \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} + \beta \cdot \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m} + \gamma \cdot \operatorname{Cos}_3\mathfrak{m},$$

d. h. einen Ausdruck für den Vector eines beliebigen Punktes ausgedrückt durch die Vectoren der Fundamentalpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Lassen wir den Punkt $\mathfrak{o}$ mit einem der Grundpunkte zusammen fallen, etwa mit $\mathfrak{c}$, so wird jetzt γ zu Null und wir haben

$$\varrho_{\mathfrak{m}} = \alpha \cdot \operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} + \beta \cdot \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m}.$$

Dabei sind $\operatorname{Cos}_1\mathfrak{m}$ und $\operatorname{Cos}_2\mathfrak{m}$ die Cosinusse in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{o}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. Fällt $\mathfrak{m}$ in die Gerade $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, so ist $\operatorname{Cos}_3\mathfrak{m} = 0$, $\operatorname{Cos}_1\mathfrak{m} + \operatorname{Cos}_2\mathfrak{m}$ daher gleich 1, und wir finden wieder das früher angegebene Resultat, dass, wenn die Coefficienten an α und β durch $\mathfrak{x}$ und $1 - \mathfrak{x}$ dargestellt sind, wir die Gleichung einer durch die Enden von α und β gehenden Geraden haben.

Geht eine Gerade nicht durch die Endpunkte von α und β, so ist die Gleichung derselben von der Form

$$\varrho_m = (a + a_1 t)\,\alpha + (b + b_1 t)\,\beta,$$

wo t eine sich continuirlich ändernde Variabele ist. Indem wir dann

$$\mathrm{Cos}_1 m = a + a_1 t,$$
$$\mathrm{Cos}_2 m = b + b_1 t$$

setzen, ist die Lage von m in Bezug auf das Dreieck o a b bestimmt. Es lässt sich übrigens die letzte Gleichung auf die Form

$$\varrho = \frac{a b_1 - b a_1}{b_1}\,\alpha\, x + \frac{b a_1 - a b_1}{a_1}\,\beta\,(1 - x)$$

bringen. Setzt man dann

$$\frac{a b_1 - b a_1}{b_1}\,\alpha = \alpha_1 \quad \text{und} \quad \frac{b a_1 - a b_1}{a_1} = \beta_1,$$

so wird

$$\varrho = x\,\alpha_1 + (1 - x)\,\beta_1,$$

woraus folgt, dass die Gerade durch die Enden von α_1 und β_1 geht.

Sind die Coefficienten an α und β nichtlineäre Functionen einer Variabeln, so ist auch

$$\varrho = f_1(t) \,.\, \alpha + f_2(t) \,.\, \beta$$

nicht die Gleichung einer Geraden, sondern einer Curve in der Ebene der Vectoren α und β.

9. — Sind α, β und γ drei nicht in einer Ebene liegende von o aus gezogene Vectoren, so ist

$$\varrho = x\,\alpha + y\,\beta + z\,\gamma$$

der Vector eines Punktes m, der gefunden wird, wenn man die drei Strecken $x\alpha$, $y\beta$ und $z\gamma$ nach Grösse und Richtung von o aus aneinander trägt. x, y und z sind hierbei Zahlen, die in der Sprache der analytischen Geometrie die Masszahlen der Coordinaten des Punktes m sind, bezogen auf ein System, das seinen Anfang in o hat und dessen Axen in die Richtungen von α, β und γ fallen.

Dieses Resultat lässt sich auch auf barycentrischem Wege gewinnen. Es ist

$$m = a \,.\, \mathrm{Cos}_1 m + b \,.\, \mathrm{Cos}_2 m + c \,.\, \mathrm{Cos}_3 m + b \,.\, \mathrm{Cos}_4 m,$$
$$o = o \,.\, \mathrm{Cos}_1 m + o \,.\, \mathrm{Cos}_2 m + o \,.\, \mathrm{Cos}_3 m + o \,.\, \mathrm{Cos}_4 m,$$

daher

$$m - o = (a - o)\,\mathrm{Cos}_1 m + (b - o)\,\mathrm{Cos}_2 m + (c - o)\,\mathrm{Cos}_3 m + (b - o)\,\mathrm{Cos}_4 m$$

oder in Vectoren

$$\varrho_m = om = oa \,.\, \mathrm{Cos}_1 m + ob \,.\, \mathrm{Cos}_2 m + oc \,.\, \mathrm{Cos}_3 m + ob \,.\, \mathrm{Cos}_4 m.$$

Damit haben wir den Vector ϱ_m eines Punktes m in Bezug auf den willkürlichen Punkt o ausgedrückt durch die Vectoren α, β, γ, δ der vier Fundamentalpunkte a, b, c, d; und zwar ist

$$\varrho_m = \alpha \,.\, \mathrm{Cos}_1 m + \beta \,.\, \mathrm{Cos}_2 m + \gamma \,.\, \mathrm{Cos}_3 m + \delta \,.\, \mathrm{Cos}_4 m.$$

Fällt der Punkt o nach d, so haben wir

$$\varrho_m = \alpha \,.\, \mathrm{Cos}_1 m + \beta \,.\, \mathrm{Cos}_2 m + \gamma \,.\, \mathrm{Cos}_3 m,$$

welches die oben gegebene Form

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma$$

ist. Dabei sind die Cosinusse auf das Tetraeder o a b c bezogen.

Fällt m in die durch a b c gehende Ebene, so ist $\mathrm{Cos}_4 m = 0$, mithin

$$\mathrm{Cos}_1 m + \mathrm{Cos}_2 m + \mathrm{Cos}_3 m = 1,$$

und diess ist das Kennzeichen dafür, dass die Punkte m in der durch die Endpunkte von α, β und γ gelegten Ebene sind. Daher wird

$$\varrho = A\alpha + B\beta + C\gamma$$

bei variabelen A, B, C eine durch die Enden von α, β, und γ gehende Ebene darstellen, wenn

$$A + B + C = 1$$

ist, und A, B, C dabei lineäre Functionen zweier Variabeln sind.

Allgemein ist

$$\varrho = f_1(t)\,\alpha + f_2(t)\,\beta + f_3(t)\,\gamma$$

die Gleichung einer räumlichen Curve, die zu einer Geraden wird, wenn die Coefficienten von α, β und γ lineäre Functionen von t sind, wie sich letzteres daraus ergiebt, dass sich dann ϱ auf die Form bringen lässt

$$\varrho = F_1(t)\,\varrho_1 + F_2(t)\,\varrho_2,$$

wo ϱ_1 und ϱ_2, die zu t_1 und t_2 gehörigen Vectoren der Curve sind.

Dagegen ist

$$\varrho = f_1(t,u)\,\alpha + f_2(t,u)\,\beta + f_3(t,u)\,\gamma$$

die Gleichung einer krummen Fläche, die zu einer Ebene wird, wenn die Coefficienten an α, β und γ lineäre Functionen von t und u sind.

So ist

$$\varrho = \alpha + t(\beta - \alpha) + u(\gamma - \beta)$$

die Gleichung der durch die Enden von α, β und γ gehenden Ebene.

10. — Um die Verwendbarkeit der Lehren über die Addition und Subtraction von Vectoren zu zeigen, wollen wir mit ihrer Hilfe einige bekannte geometrische Sätze herleiten.

(1.) Um nachzuweisen, dass die Mittellinien $a a_1$, $b b_1$, $c c_1$ im Dreiecke a b c durch denselben Punkt gehen und einander so theilen, dass die Stücke sich verhalten wie 2 : 1, nehmen wir a als den Anfang der Vectoren α, β und γ an, welche beziehungsweise parallel und gleich zu den Dreiecksseiten b c, a c und a b sind. Dann sind die Gleichungen von $b b_1$, $c c_1$ und $a a_1$ beziehungsweise

$$\varrho = \gamma + t(\gamma - {}^1/_2\beta) = (1+t)\gamma - {}^1/_2 t\beta,$$
$$\varrho = \beta + u(\beta - {}^1/_2\gamma) = (1+u)\beta - {}^1/_2 u\gamma,$$
$$\varrho = x(\beta + \gamma).$$

In dem Schnittpunkte von bb_1 und cc_1 ist

$$(1+t)\gamma - {}^1/_2 t\beta = (1+u)\beta - {}^1/_2 u\gamma;$$

daher durch Gleichsetzung der Coefficienten von β und γ

$$1 + t = -{}^1/_2 u,$$
$$1 + u = -{}^1/_2 t,$$

woraus $t = u = -{}^2/_3$ folgt.

Daher ist das ϱ dieses Schnittpunktes

$$\varrho = {}^1/_3(\beta + \gamma),$$

d. h. es gehört der Schnittpunkt auch der dritten Mittellinie aa_1 an und liegt in $^2/_3$ von aa_1, da $\beta + \gamma = 2aa_1$ ist.

(2.) Um ferner zu zeigen, dass die Winkelhalbirende im Scheitel a die Gegenseite bc im Verhältniss der anliegenden Seiten theilt, denken wir uns in der Richtung ab einen Einheitsvector γ und in der Richtung ac einen Einheitsvector β, dann ist

$$\varrho = x(\beta + \gamma)$$

die Gleichung der Winkelhalbirenden in a, weil bei gleicher Länge von β und γ diese Gleichung die Diagonale eines Rhombus darstellt und also unsre Behauptung richtig ist. Trifft die Winkelhalbirende die Seite bc in a', so ist der Vector

$$aa' = t(\beta + \gamma),$$

aber auch

$$aa' = ab + ba' = ab + u(ac - ab)$$
$$= c\gamma + u(b\beta - c\gamma),$$

wobei b und c die Masszahlen der Seiten ac und ab sind. Aus

$$t(\beta + \gamma) = c\gamma + u(b\beta - c\gamma)$$

folgt durch Gleichsetzung der Coefficienten an β und γ

$$t = ub,$$
$$t = c - uc,$$

und hieraus

$$u = \frac{c}{b+c}.$$

Nun ist u die Theilzahl von bc für das Stück ba', daher ist die Theilzahl für $a'c$ gleich

$$1 - u = \frac{b}{b+c}.$$

Es ist also

$$ba' : a'c = c : b,$$

was zu beweisen war.

Das zur Lösung solcher Aufgaben einzuschlagende Verfahren besteht vorwiegend darin, dass man zu demselben Punkte auf zwei verschiedenen Wegen zu gelangen sucht, d. h. den Vector des betreffenden Punktes auf zwei Arten mit Hilfe einiger Fundamentalvectoren ausdrückt, dann die so erhaltenen Ausdrücke einander gleich annimmt und endlich durch Gleichsetzung der Coefficienten derselben Vectoren zu dem verlangten Resultate zu kommen sucht. In vielen Fällen ist es dabei vortheilhaft, Einheitsvectoren anzunehmen, während in anderen Untersuchungen die Grundvectoren bei verschiedener Länge zu einfachern Lösungen führen.

11. — Auch der Untersuchung von Curven kann die Vectorenmethode vortheilhaft zu Grunde gelegt werden.

Da der Vector ϱ eines Punktes derselbe ist, wie der Radiusvector der Polarcoordinaten, so lässt sich leicht eine Vectorengleichung einer Curve finden, d. h. eine Gleichung, wodurch der Vector eines beliebigen Curvenpunktes ausgedrückt ist mit Hilfe von zwei oder drei constanten Vectoren, d. h. Vectoren von gegebener Länge und Richtung, und mit Hilfe einer Variabeln, wenn wir nur die Gleichung der Curve in irgend einem Punkt-Coordinatensysteme besitzen. Ist z. B. die Gleichung in rechtwinkligen Parallelcoordinaten gegeben, so haben wir nur x und y mit Hilfe einer Variabeln und zweier in die Richtung der Axen fallenden Einheitsvectoren auszudrücken, oder auch x und y selbst unmittelbar wie Masszahlen der in die Richtung von α und β fallenden Coordinaten als Coefficienten an α und β einzuführen, und dann die Summe dieser Ausdrücke gleich ϱ zu setzen. So ist z. B. unter Voraussetzung gleichlanger Vectoren α und β, die rechtwinklig zu einander gerichtet sind,

$$\varrho = x\alpha + y\beta, \text{ wenn } x^2 + y^2 = 1, \text{ oder}$$
$$\varrho = x\alpha + \sqrt{1 - x^2}\beta,$$

oder endlich

$$\varrho = \alpha \sin t + \beta \cos t$$

die Gleichung eines Kreises.

Um aus der auf einen Durchmesser und die conjugirte Berührende bezogenen Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2Px$$

die Vectorengleichung dieser Curve zu finden, setzen wir

$$x = \alpha t^2,$$
$$y = \beta t,$$

wobei α die Richtung eines Durchmessers, β die der zugehörigen Sehnen hat. Dadurch erhalten wir

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass

$$\frac{b^2}{a} = 2P$$

das Längenverhältniss von α zu β bestimmt, wenn a und b die Tensoren von α und β sind.

Ebenso ergiebt sich aus

$$xy = \frac{c^2}{4},$$

der Gleichung der Hyperbel bezogen auf die Asympoteten als Axen,

$$\varrho = \alpha u + \frac{c^2}{4u}\beta = \alpha . \operatorname{tang} t + \frac{c^2}{4}\beta . \cot t,$$

wenn α und β gleiche Länge haben und in die Richtungen der Asympoteten fallen.

Die Gleichung einer Schraubenlinie ist

$$\varrho = \alpha \cos t + \beta \sin t + \gamma t,$$

wenn α, β und γ drei gleichlange und zu einander senkrechte Vectoren sind, wie sich ergiebt, wenn man

$$\alpha \cos t + \beta \sin t$$

als den Vector eines Punktes des Basiskreises und γt als die dritte Coordinate eines Punktes m der Schraubenlinie ansieht.

Die Gleichung einer Kugelfläche ist

$$\varrho = \alpha \cos \xi + \beta \cos \eta + \gamma \cos \zeta,$$

wenn ξ, η und ζ die Winkel sind, welche ϱ mit den Richtungen der zu einander senkrechten Einheitsvectoren α, β und γ bildet.

12. — Ist für einen Punkt m

$$\varrho = f(t)$$

die Vectorengleichung einer ebenen Curve, d. h. eine Gleichung von der Form

$$\varrho = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta,$$

so ist für einen zweiten Punkt m_1 derselben Curve

$$\varrho_1 = f_1(t_1)\alpha + f_2(t_1)\beta,$$

und es ist

$$\sigma = \varrho_1 - \varrho = \alpha [f_1(t_1) - f_1(t)] + \beta [f_2(t_1) - f_2(t)]$$

die Gleichung für den Vector $m\,m_1$, d. h. der Sehne vom ersten zum zweiten Punkt der Curve, resp. einer Parallelen dazu durch den Anfangspunkt o der Vectoren. Diese Gleichung lässt sich auch schreiben

$$\begin{aligned}\sigma &= \alpha [f_1(t + \triangle t) - f_1(t)] + \beta [f_2(t + \triangle t) - f_2(t)] \\ &= [\alpha f_1'(t + \vartheta \triangle t) + \beta f_2'(t + \vartheta \triangle t)] . \triangle t,\end{aligned}$$

worin ϑ einen ächten Bruch bezeichet. Ein beliebiger Punkt dieser Secante hat daher zum Vector längs dieser Secante

$$\sigma = x . [\alpha f_1'(t + \vartheta . \triangle t) + \beta f_2'(t + \vartheta . \triangle t)],$$

und an der Grenze, wo die Secante zur Tangente wird,

$$\sigma = x\,[\alpha \,.\, f_1'(t) + \beta \,.\, f_2'(t)].$$

Nennen wir nun ϱ_1 den Vector des Berührungspunktes, so ist für einen beliebigen Punkt der Tangente, bezogen auf o als Anfang der Vectoren,

$$\varrho = \varrho_1 + \sigma = f(t_1) + x\,f'(t_1)$$
$$= \varrho_1 + x\,\frac{d\,\varrho_1}{dt}.$$

So ist für die Parabel, deren Vectorengleichung

$$\varrho = t^2\alpha + t\beta$$

ist, die Gleichung der Tangente

$$\varrho = \alpha t^2 + \beta t + x\,(2\alpha t + \beta).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Tangente durch den Endpunkt von

$$\alpha t^2 + \beta t$$

geht und parallel ist zu dem Vector

$$\varrho = 2\alpha t + \beta,$$

oder auch zu

$$t\varrho = 2\alpha t^2 + \beta t = \alpha t^2 + \alpha t^2 + \beta t.$$

In dem letzten Ausdrucke ist aber αt^2 die Abscisse des Berührungspunktes, während $\alpha t^2 + \beta t$ der Vector desselben ist. Die Summe dieser beiden Ausdrücke führt daher zu einer Richtung, die parallel der Diagonale des Parallelogrammes aus der Abscisse und dem Vector des Berührungspunktes geht. Eine nähere Betrachtung der Figur lehrt dann aber einfach die bekannte Eigenschaft, wonach in der Parabel die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes ist.

Dieselbe Eigenschaft lässt sich auch daraus erkennen, dass, wenn wir in der Gleichung der Tangente $x = -t$ setzen,

$$\varrho = -\alpha t^2$$

wird. Der hierzu gehörige Punkt liegt mithin auf der Abscissenaxe, da in dem Ausdrucke für sein ϱ der Vector β nicht vorkommt; und es ist ϱ überdiess gleich dem negativen Werthe der Abscisse.

Aus der auf conjugirte Durchmesser bezogenen Gleichung der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

finden wir

$$\varrho = x\alpha + y\beta = x\alpha + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,\beta,$$

wenn α und β Einheitsvectoren in den Richtungen der conjugirten Durchmesser vorstellen. Die Gleichung der Tangente in einem Punkte der Ellipse ist daher

$$\varrho = x\alpha + y\beta + X\,(\alpha - \frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\beta),$$

worin X jetzt eine Variable vorstellt, die zu den einzelnen Punkten der Tangente führt. Es ist aber auch ϱ darstellbar in der Form

$$\varrho = x\alpha + y\beta + X\left(\alpha - \frac{b^2 x}{a^2 y}\beta\right)$$

$$= x\alpha + y\beta + \frac{X}{y}(y\alpha - px\beta)$$

$$= x\alpha + y\beta + Z(y\alpha - px\beta),$$

wenn wir $X : y = Z$ setzen, welches erlaubt ist, da y für jede einzelne Tangente eine Constante ist.

Mit Hilfe dieses Ausdrucks lässt sich z. B. für die Ellipse der Satz beweisen, dass, wenn die Tangenten in den Punkten $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ einander in $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{l}_1$ $\mathfrak{m}_1$, schneiden, dann die Gleichung besteht

$$\mathfrak{k}\mathfrak{l}_1 . \mathfrak{l}\mathfrak{m}_1 . \mathfrak{m}\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}\mathfrak{m}_1 . \mathfrak{m}\mathfrak{l}_1 . \mathfrak{l}\mathfrak{k}_1.$$

Denn sind x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3 die Coordinaten der Berührungspunkte, so ist

$$\varrho = o\mathfrak{m}_1 = x_1\alpha + y_1\beta + Z_1(y_1\alpha - px_1\beta);$$

es ist aber auch

$$\varrho = o\mathfrak{m}_1 = x_2\alpha + y_2\beta + Z_2(y_2\alpha - px_2\beta),$$

da $\mathfrak{m}_1$ auf den Tangenten in $\mathfrak{k}$ und in $\mathfrak{l}$ liegt.

Durch Gleichsetzung der Coefficienten an α und β finden wir hieraus

$$x_1 + Z_1 y_1 = x_2 + Z_2 y_2,$$

$$y_1 - p y_1 Z_1 = y_2 - p x_2 Z_2.$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach Z_1 und Z_2 ergiebt sich

$$Z_1 = -Z_2.$$

Bezeichnen wir die entsprechenden Zahlen für die Punkte $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{l}_1$, mit X und Y, so finden wir

$$X_1 = -X_2,$$

$$Y_1 = -Y_2.$$

Daher ist

$$X_1 Y_2 Z_1 = -X_2 Y_1 Z_2.$$

Nun ist aber

$$\frac{Z_1}{Y_1} = \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{m}_1}{\mathfrak{k}\mathfrak{l}_1}.$$

Durch Aufstellung der entsprechenden Gleichungen für $\mathfrak{l}\mathfrak{k}_1 : \mathfrak{l}\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{l}_1 : \mathfrak{m}\mathfrak{k}_1$ ergiebt sich unser Satz, dessen Giltigkeit für die Hyperbel leicht aus deren Tangentengleichung

$$\varrho = x\alpha + y\beta + Z(y\alpha + px\beta)$$

sich ableiten lässt.

Aus der Gleichung der Hyperbel bezogen auf ihre Asympoteten

$$xy = \frac{c^2}{4},$$

erhält man die Vectorengleichung

$$\varrho = t\alpha + \frac{\beta}{t},$$

wobei das Längenverhältniss von α und β bestimmt wird durch die Gleichung

$$ab = T\alpha \,.\, T\beta = \frac{c^2}{4}.$$

Dann ist die Gleichung der Berührenden

$$\varrho = t\alpha + \frac{\beta}{t} + X\left(\alpha - \frac{\beta}{t^2}\right).$$

Da hierin t eine Constante ist, nämlich der Werth dieser Variabeln, der in der Gleichung der Curve zum Berührungspunkte unsrer Tangente führt, so kann man auch setzen

$$\varrho = t\alpha + \frac{\beta}{t} + \frac{X}{t}\left(t\alpha - \frac{\beta}{t}\right)$$
$$= t\alpha + \frac{\beta}{t} + Z\left(t\alpha - \frac{\beta}{t}\right).$$

Die Tangente geht mithin parallel zu $t\alpha - \frac{\beta}{t}$, und da diese Gerade mit dem Vector $t\alpha + \frac{\beta}{t}$ und mit α und β ein harmonisches Büschel bildet, dessen vierter Strahl der Diagonale des Parallelogrammes aus den Coordinaten des Berührungspunktes parallel geht, so ergiebt sich hieraus leicht die bekannte Construction der Tangente mit Hilfe der Asymptoten, sowie der Satz, dass die Subtangente auf der Asymptote gleich der Abscisse des Berührungspunktes ist.

12. — Aus der Vectorengleichung der Tangente lässt sich auch der barycentrische Ausdruck für die Punkte der Berührenden ableiten.

Aus

$$\varrho = f(t) + x\,f'(t) = f_1(t)\,\alpha + f_2(t)\,\beta + x\,[f_1'(t)\,\alpha + f_2'(t)\,\beta]$$

folgt

$$o\,m = [f_1(t) + x\,f_1'(t)]\,o\,a + [f_2(t) + x\,f_2'(t)]\,o\,b,$$

oder

$$m - o = F_1(t)\,(a - o) + F_2(t)\,(b - o),$$

und hieraus

$$m = F_1(t)\,a + F_2(t)\,b + [1 - F_1(t) - F_2(t)]\,o$$
$$= f_1(t)\,a + f_2(t)\,b + [1 - f_1(t) - f_2(t)]\,o$$
$$+ x\left[f_1'(t)\,a + f_2'(t)\,b - [f_1'(t) + f_2'(t)]\,o\right].$$

Ersetzt man hierin o durch c, so ist

$$m = F(t, a, b, c) + x\,F'_t(t, a, b, c)$$

der barycentrische Ausdruck für einen Punkt der Tangente, welche im Punkte t die Curve berührt.

So folgt aus der Gleichung des Kreises

$$\varrho = \alpha \sin t + \beta \cos t$$

die Gleichung

$$\mathfrak{m} = \sin t \,.\, \mathfrak{a} + \cos t \,.\, \mathfrak{b} + (1 - \sin t - \cos t)\,\mathfrak{c} + x\,[\cos t \,.\, \mathfrak{a} - \sin t \,.\, \mathfrak{b} + (\sin t - \cos t)\,\mathfrak{c}]$$

als Ausdruck für einen Punkt der Tangente dieser Curve.

13. — Um an einem Beispiele auch die Verwendung der Vectorenmethode bei der Untersuchung von Umhüllungscurven zu zeigen, wollen wir die Vectorengleichung der Curve suchen, welche von Geraden umhüllt ist, die mit zwei schneidenden Geraden inhaltsgleiche Dreiecke bilden.

Gesetzt die Fundamentalvectoren α und β hätten ihren Anfang im Schnittpunkt der festen Geraden und fielen einzeln in die Richtungen derselben. Dann können wir die von einer der umhüllenden Geraden (Tangenten) gebildeten Abschnitte mit $t\alpha$ und $\frac{1}{t}\beta$ bezeichnen, indem jetzt das Product dieser Abschnitte constant und gleich $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$ ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Tensoren von α und β sind. Die Gleichung einer solchen Tangente ist daher

$$\varrho = t\alpha + x\left(\frac{\beta}{t} - t\alpha\right).$$

Die einer benachbarten Tangente ist dann

$$\varrho_1 = t_1\alpha + x_1\left(\frac{\beta}{t_1} - t_1\alpha\right).$$

Im Schnittpunkte beider Tangenten ist $\varrho = \varrho_1$, daher

$$t\alpha + x\left(\frac{\beta}{t} - t\alpha\right) = t_1\alpha + x_1\left(\frac{\beta}{t_1} - t_1\alpha\right).$$

Hieraus ergiebt sich durch Gleichsetzung der Coefficienten von α und der von β

$$t - xt = t_1 - x_1 t_1,$$

$$\frac{x}{t} = \frac{x_1}{t_1};$$

und durch Elimination von x_1

$$t(1 - x) = t_1\left(1 - \frac{t_1}{t}x\right),$$

also

$$x = \frac{t}{t + t_1}.$$

Mithin ist das ϱ des Schnittpunktes

$$\varrho = t\alpha + \frac{t}{t + t_1}\left(\frac{\beta}{t} - t\alpha\right).$$

An der Grenze wird t_1 gleich t, der Schnittpunkt zum Berührungspunkt, und wir haben daher für ihn, d. h. für einen Punkt der gesuchten Umhüllungscurve,

$$\varrho = t\alpha + {}^1/_2\left(\frac{\beta}{t} - t\alpha\right)$$

oder

$$\varrho = {}^1/_2\, t\alpha + {}^1/_2\,\frac{\beta}{t},$$

d. h. die Gleichung einer Hyperbel.

So vielfach nun sich geometrische Resultate mit Benutzung der Vectorenmethode erzielen lassen, so mussten wir uns in den vorgeführten Beispielen doch stets auf solche beschränken, wobei nur Summen und Differenzen dieser mit einer Richtung behafteten Strecken vorkommen. Sollen auch Producte und Quotienten der Vectoren in Rechnung gezogen werden, so bedarf es der Theorie der Quaternionen, wozu wir nun übergehen.

§. 45. Definition der Quaternionen.

1. — Den Quotienten

$$q = \frac{\beta}{\alpha}$$

der zwei von demselben Puncte ausgehenden Strecken oder coinitialen Vectoren β und α nennt Hamilton eine Quaternion. Eine solche Quaternion ist abhängig von vier Stücken:

1) Von dem absoluten Längenverhältniss der Vectoren β und α;
2) von dem Winkel φ, den β mit α bildet, und
3) und 4) von den zwei Bestimmungsstücken der Stellung der Ebene, in welcher β und α enthalten sind.

Bezeichnen b und a die Zahlen, welche mit der Längeneinheit multiplicirt die Längen von β und α ergeben, so ist das absolute Längenverhältniss von β zu α ausgedrückt durch b:a. Benutzen wir dagegen die in §. 44, 1 gegebene Zerlegung eines Vectors in Tensor und Versor, so ist

$$\alpha = T\alpha \,.\, U\alpha,$$
$$\beta = T\beta \,.\, U\beta,$$

daher

$$\frac{b}{a} = \frac{T\beta}{T\alpha}.$$

In Bezug auf die Ebene $\alpha\beta$ handelt es sich nicht um die absolute Lage derselben, sondern nur um ihre Stellung, d. h. das was allen unter einander parallelen Ebenen gemein ist. Diese Stellung ist aber bestimmt durch die zwei Keile, welche eine Ebene mit zwei festen nicht parallelen Ebenen bildet, oder auch durch die Winkel, welche ein Loth auf die Ebene mit festen Axen macht.

Es ist also die Quaternion

$$q = \frac{\beta}{\alpha}$$

das Verhältniss der Schenkel β und α zu einander mit Berücksichtigung der Grösse des Winkels $\alpha\beta$ und der Stellung der Ebene $\alpha\beta$. Den Winkel $\alpha\beta$ und die Ebene $\alpha\beta$ werden wir oft kurz den Winkel und die Ebene der Quaternion selbst nennen.

2. — Auf die Frage, wie in dem Quotienten

$$q = \frac{\beta}{\alpha}$$

die oben genannten drei Bestimmungsstücke berücksichtigt werden sollen, können wir hier bloss sagen, dass wir die Quaternionen

$$q = \frac{\beta}{\alpha}$$

und

$$q_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

nur dann einander gleich setzen werden, wenn dieselben in Bezug auf die oben genannten Stücke übereinstimmen. Es muss also sein

$$b : a = b_1 : a_1,$$

oder

$$T\beta : T\alpha = T\beta_1 : T\alpha_1;$$

ferner

$$\text{Winkel } \alpha\beta = \text{Winkel } \alpha_1\beta_1,$$

und endlich

$$\text{Ebene } \alpha\beta \parallel \text{Ebene } \alpha_1\beta_1.$$

Diese Bedingungen werden erfüllt sein, wenn die Dreiecke, die α und β, sowie α_1 und β_1 zu homologen Seiten haben, ähnlich sind und in derselben oder in parallelen Ebenen so liegen, dass die homologen Winkel von den einander entsprechenden Seiten durch Drehungen beschrieben werden, die in demselben Sinne erfolgen. Erfolgen die Drehungen der gleichen Winkel in entgegengesetztem Sinne; während sonst alle Bedingungen zur Gleichheit der Quaternionen erfüllt sind, so gelangt man zu den später noch näher zu betrachtenden conjugirten Quaternionen. Weitere Beschränkungen als die genannten werden dagegen den Vectoren nicht auferlegt, damit $q = q_1$ sei.

3. — Fallen α und β in dieselbe Richtung, so reducirt sich q auf eine gewöhnliche Zahl, Scalar genannt, weil dann α und β gleichsam derselben Scala angehören. Dieser Scalar wird positiv oder negativ sein, je nachdem der Sinn der Richtung von α und β derselbe ist oder nicht. Ist dagegen die Richtung von β unter einem anderen Winkel als o oder π gegen die von α geneigt, so ist die Quaternion nicht ausdrückbar durch einen Scalar. Bezeichnen wir z. B. die von rechts nach links folgenden vier halben Diagonalen eines Quadrates mit α, β, γ, δ, so sind die vier Quaternionen

$$\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{\delta}{\gamma}, \quad \frac{\alpha}{\delta}$$

einander gleich; den wirklichen Werth q derselben finden wir aber, wenn wir, unter Annahme der Giltigkeit der Gesetze der allgemeinen Arithmetik für diese Quotienten,

$$q \cdot q = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

setzen. Nun sind zwar γ und α zwei Vectoren von gleicher Länge, aber von entgegengesetzter Richtung; mithin ist $\gamma : \alpha = -1$, also

$$q \cdot q = q^2 = -1,$$

und daraus

$$q = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Derselbe Werth wird sich in allen Fällen ergeben, wo β senkrecht zu α ist, nur wird $\sqrt{-1}$ noch mit

$$\frac{b}{a} = \frac{T\beta}{T\alpha}$$

multiplicirt sein, wenn die absolute Länge von β nicht gleich der von α ist.

Sind dagegen die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks als Vectoren mit α_1, α_2 und α_3 bezeichnet, so sind alle Bedingungen zur Gleichheit der drei Quotienten

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$$

erfüllt, und wir können setzen

$$q = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}.$$

Das Product dieser drei Quaternionen ergiebt

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \cdot \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = q^3 = 1,$$

und daraus

$$q = \sqrt[3]{1}.$$

Von den drei Werthen dieser Wurzel ist $q = 1$ offenbar hier nicht zulässig, da q kein Scalar ist. Es ist vielmehr

$$q = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Die doppelten Zeichen, die sich in den beiden vorgeführten Beispielen finden, beziehen sich darauf, dass als Winkel der Glieder der Quaternion im ersten Fall $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$, und im zweiten Falle $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{5}{3}\pi$ gelten können, je nachdem man den ersten Schenkel in dem einen oder in dem andern Sinne dreht, um den Winkel der Quaternion zu beschreiben.

Den Werth

$$q = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i$$

können wir auch dadurch finden, dass wir, mit Anwendung der im vorigen Paragraphen gelehrten Zerlegung der Vectoren, α_2 auflösen in

$$\alpha_2 = x\alpha_1 + y\beta,$$

wobei β senkrecht zu α_1 und von gleicher Länge mit ihm gedacht ist. Dann finden wir leicht für x und y die Werthe $1/2$ und $1/2\sqrt{3}$; daher ist

$$\alpha_2 = 1/2\,\alpha_1 + 1/2\sqrt{3}\,\beta.$$

Mithin ist jetzt

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1/2 + 1/2\sqrt{3}\,\frac{\beta}{\alpha_1},$$

wenn wir annehmen, dass Division in eine Summe auch hier gleich der Division in die einzelnen Posten ist. Der Quotient $\beta : \alpha_1$, dessen Glieder zwar gleiche Länge haben, die aber senkrecht zu einander stehen, ist nach den obenstehenden Betrachtungen gleich i, mithin

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1/2 + 1/2\sqrt{3}\,.\,i.$$

4. — Die vorstehenden Beispiele werden ausreichen, um den Begriff der Quaternion zu erläutern. Dass wir dabei die Ebene der Quaternion nicht berücksichtigten, war nur deshalb zulässig, weil alle benutzten Quaternionen derselben Ebene angehörten.

Zu unrichtigen Resultaten würden wir dagegen gelangen, wollten wir z. B. Quaternionen bilden aus den Kanten eines regulären Tetraeders und dabei annehmen, dass je zwei schneidende Kanten durch Division der einen durch die andre zu gleichen Quaternionen führten, weil die Kanten gleiche Länge haben und gleiche Winkel mit einander bilden. Diess würde desshalb ungenau sein, weil die so gebildeten Quaternionen, zum Theil wenigstens, verschiedenen Ebenen angehören.

§. 46. Zerlegung einer Quaternion in ein Product.

1. — Wenn dem geometrischen Quotienten zweier Vectoren ähnliche Eigenschaften zukommen sollen, wie dem algebraischen, so müssen wir vor allen Dingen fordern, d. h. durch Definition feststellen, dass

$$q\,.\,\alpha = \frac{\beta}{\alpha}\,.\,\alpha = \beta$$

ist. Die Quaternion q bewirkt also, dass der Vector α durch Multiplication mit q übergeführt wird in den Vector β, und zwar nach Grösse und Richtung. Hierzu gehört aber zweierlei: es muss zuerst die Länge a von α verwandelt werden in die Länge b von β, d. h. es muss α entweder gestreckt oder verkürzt werden, bis es die Länge von β erreicht hat; ausserdem muss aber auch eine Drehung erfolgen, bis das gestreckte

α in die Richtung von β fällt. Der Factor q, der dieses bewirkt, kann daher aus zwei Factoren bestehend gedacht werden, von welchen der eine — der Strecker oder Tensor — die Längenänderung, der zweite — der Dreher oder Versor — die Richtungsänderung bewirkt. Bezeichnet man nun den Tensor mit

$$\mathrm{T}q,$$

den Versor mit

$$\mathrm{U}q,$$

so ist

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{T}q \,.\, \mathrm{U}q = \mathrm{U}q \,.\, \mathrm{T}q,$$

da es einerlei ist, welche von beiden Operationen zuerst vorgenommen wird. Es ist also jetzt

$$\beta = \mathrm{T}q \,.\, \mathrm{U}q \,.\, \alpha;$$

hierin ist $\mathrm{T}q = \mathrm{T}\beta : \mathrm{T}\alpha$ das absolute Längenverhältniss von β zu α, nach Hamilton eine absolute Zahl, während Uq einen Factor darstellt, der eine damit multiplicirte Strecke um den Winkel $\alpha\beta$ dreht.

Dass nicht bloss der Vector α um den Winkel $\alpha\beta$ gedreht wird durch Multiplication mit Uq, sondern auch jede andre in der Ebene $\alpha\beta$ befindliche Strecke γ, wenn dieselbe mit q multiplicirt wird, geht daraus hervor, dass

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$$

gesetzt werden kann, wenn nur der letzte Quotient die zur Gleichung mit $\frac{\beta}{\alpha}$ nöthigen Bedingungen (vergl. §. 45, 2) erfüllt. Es ist daher auch

$$q \,.\, \gamma = \frac{\delta}{\gamma}\gamma = \delta,$$

und damit die Behauptung bewiesen, dass q ein Operator ist, der einen Vector in der Ebene der Quaternion durch Multiplication dreht um den Winkel der Quaternion und zugleich im Verhältniss des Tensors Tq streckt oder verkürzt.

Sind α und β längengleich, so reducirt sich

$$q = \frac{\beta}{\alpha}$$

auf den Versor Uq. Haben dagegen α und β einerlei Richtung, so ist

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{T}q$$

eine reelle Zahl, ein Scalar.

Durch Multiplication eines Vectors mit einem Versor wird derselbe nur gedreht, durch Multiplication mit einem Tensor nur gestreckt.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich auch die Berechtigung zu den Bezeichnungen $T\alpha$ und $U\alpha$. Es dient nämlich $T\alpha$ zur Angabe der absoluten Länge a des Vectors α ohne Rücksicht auf die Richtung, und $U\alpha$ bestimmt eine Längeneinheit in der Richtung von α. Daher eliminirt $T\alpha$ aus dem Vector α die Richtung, während $U\alpha$ den Vector seiner Grösse entkleidet. Ein beliebiger Vector ϱ wird mithin durch Multiplication mit $T\alpha$ nur in seiner Länge geändert im Verhältniss von a : 1, während eine richtungslose Strecke r mit $U\alpha$ multiplicirt ohne Grössenänderung dadurch in die Richtung von α gebracht wird.

§. 47. Die Rechnung mit Quaternionen.

1. — Jede Verbindung zweier Quaternionen durch eine der Grundrechnungsarten führt wieder zu einer Quaternion als Resultat der Rechnung, wie wir im Folgenden nachweisen wollen.

Um zwei Quaternionen

$$q_1 = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$q_2 = \frac{\delta}{\gamma}$$

zu addiren, denken wir uns dieselben auf denselben Nenner gebracht. Diess kann immer dadurch geschehen, dass wir in der Durchschnittslinie der Ebenen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$, eine Strecke μ annehmen, und hierzu β_1 und δ_1 so bestimmen, dass

$$\beta : \alpha = \beta_1 : \mu,$$
$$\delta : \gamma = \delta_1 : \mu,$$

während zugleich β_1 in der Ebene $\alpha\beta$, δ_1 in der Ebene $\gamma\delta$ liegt, Voraussetzungen, ohne welche die vorstehenden Vectoren-Proportionen gar nicht giltig oder möglich wären. Dann ist

$$q_1 \pm q_2 = \frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta_1}{\mu} \pm \frac{\delta_1}{\mu} = \frac{\beta_1 \pm \delta_1}{\mu},$$

wenn wir das distributive Princip, d. h. hier den Satz über die Addition von Quotienten mit gleichen Divisoren, in dieser Form als auch für Quaternionen richtig annehmen. Es ist also die Summe oder Differenz zweier Quaternionen wieder eine Quaternion, indem $\beta_1 \pm \delta_1$ sich in einen mit μ coinitialen Vector ν zusammmensetzen lassen, der durch μ dividirt die verlangte Quaternion ergiebt.

2. — Dass auch das Product und der Quotient zweier Quaternionen wieder zu Quaternionen führen, ist leicht nachweisbar. Da nach (1.)

$$q_1 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\mu},$$

$$q_2 = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\delta_1}{\mu}$$

gesetzt werden kann, so ist

$$q_1 : q_2 = \frac{\beta_1}{\mu} : \frac{\delta_1}{\mu}.$$

Von dem rechts stehenden Doppelquotienten dürfen wir aber annehmen, dass er in Uebereinstimmung mit den Lehren der allgemeinen Arithmethik gleich

$$\beta_1 : \delta_1,$$

d. h. wieder eine Quaternion ist.

Setzen wir schliesslich

$$q_1 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\nu},$$

$$q_2 = \frac{\delta}{\nu} = \frac{\nu}{\gamma_1},$$

wo ν ein in der Durchschnittslinie der Ebenen von q_1 und q_2 gelegener Vector ist, während β_1 und γ_1 in den Ebenen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ liegen, so haben wir

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{\beta_1}{\nu} \cdot \frac{\nu}{\gamma_1} = \frac{\beta_1}{\gamma_1},$$

d. h. auch das Product zweier Quaternionen ist wieder eine Quaternion.

3. — So einfach nun auch die vorstehenden Resultate der Rechnungen mit Quaternionen sind, so knüpft sich doch an das Product zweier Quaternionen eine Eigenthümlichkeit der Operationen mit diesen Zahlgebilden, wodurch ein einschneidender Unterschied zwischen der Rechnung mit ihnen und den in den Elementen der allgemeinen Arithmethik benutzten Zahlen hervorgerufen wird. Während nämlich fast alle Gesetze der allgemeinen Arithmetik auch bei der Rechnung mit Quaternionen giltig bleiben, führt die weitere Untersuchung und namentlich die Anwendungen dieses neuen Zweiges der Arithmetik darauf, dass das Gesetz der Commutativität, d. h. der Vertauschbarkeit der Factoren eines Productes nicht mehr allgemein giltig ist für das Product zweier Quaternionen. Es ist mit anderen Worten $q_1 q_2$ nicht immer gleich $q_2 q_1$. So merkwürdig diess für den ersten Augenblick auch erscheinen mag, und wie grosse Schwierigkeit es auch dem Erfinder der Quaternionen R. Hamilton gemacht, bis er zur Erkenntniss dieses Principes durchgedrungen, so müssen wir dasselbe doch hier annehmen und es den ferneren Entwicklungen überlassen, dem Satz sein Befremdendes zu nehmen und uns schliesslich auf den Standpunkt zu bringen, dass wir dieses Princip als richtig und nothwendig erkennen. Diese Einsicht wird sich leicht

ergeben, wenn wir nur festhalten, dass mit einer Quaternion multipliciren nicht bloss vergrössern oder verkleinern, sondern auch um einen gewissen Winkel drehen heisst. Dass der Grösse nach $q_1 q_2$ dasselbe ist wie $q_2 q_1$ werden wir finden. Dass aber eine Drehung, die durch Multiplication mit q_1 bewirkt wird, nicht nothwendig dasselbe ergeben muss, wie eine Drehung, die durch q_2 hervorgerufen wird, zumal diese Drehungen in verschiedenen Ebenen stattfinden, bedarf keines Beweises. Die ganze Schwierigkeit wird nur dadurch veranlasst, dass wir das Zeichen der Multiplication benutzen für eine Operation, die zugleich eine Multiplication und eine Drehung in sich schliesst, für die also die alten Gesetze gar nicht zu gelten brauchen, und in der That nicht alle gelten.

4. — Indem wir nun also $q_1 q_2$ nicht allgemein gleich $q_2 q_1$ annehmen, so fragt es sich, wie man diess formell zum Ausdruck bringen soll. Man kann zu dem Zwecke mit Hamilton festsetzen, dass in

$$q_1 \, q_2$$

immer der rechts stehende Factor durch den linken, oder dass der links stehende in den rechts stehenden multiplicirt wird, und den rechts stehenden Multiplicandus, den links stehenden Multiplicator nennen.

Wenn ferner

$$q_1 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\nu},$$

$$q_2 = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\nu}{\gamma_1},$$

wobei β_1, γ_1 und ν die in (2.) dieses Paragraphen gegebene Bedeutung haben, so ist

$$q_1 \, q_2 = \frac{\beta_1}{\nu} \cdot \frac{\nu}{\gamma_1} = \frac{\beta_1}{\gamma_1}.$$

Damit man nun nicht auch

$$q_2 \cdot q_1 = \frac{\nu}{\gamma_1} \cdot \frac{\beta_1}{\nu} = \frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

setzt, muss man eine Bestimmung darüber treffen, in welchem von diesen beiden Fällen $\beta_1 : \gamma_1$ das Product der beiden Quaternionen bezeichnen soll. Hamilton hat zu diesem Zwecke festgestellt, d. h. angenommen, dass nur der Nenner des Multiplicators sich gegen den Zähler des Multiplicanden herausheben könne, dass also allgemein

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma},$$

nicht aber dass

$$\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma},$$

eine Regel, die man nach Kelland leicht sich merken kann, wenn man

festhält, dass bei gleichen Werthen Zähler und Nenner zweier als Factoren aufeinander folgenden Quaternionen sich nur dann tilgen, wenn dieselben durch einen Strich ausgestrichen werden können, der in der Neigung der gewöhnlichen Schrift geführt wird.

Wir setzen also in Zukunft voraus, dass allgemein $q_1 q_2$ nicht gleich $q_2 q_1$ ist. Ausnahmen finden sich bloss, wenn q_1 und q_2 in derselben Ebene sind, indem für diesen Fall es allerdings einerlei ist, ob ein Vector dieser Ebene erst um den einen und dann um den andern Winkel gedreht wird, oder, ob diese Drehungen in demselben Sinne aber in geänderter Folge eintreten.

Als eine Folgerung aus dieser Nichtvertauschbarkeit der Factoren nehmen wir also an, dass nur

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Für

$$\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

haben wir im Allgemeinen keine Vereinfachung anzubringen.

5. — Unter Voraussetzung des letzten Satzes lässt sich nun auch an einer Figur leicht die Verschiedenheit der Resultate von $q_1 q_2$ und $q_2 q_1$ zeigen.

Es seien in Fig. 20 (worin b_1 durch c_1 zu ersetzen ist) oa, ob und oc drei Einheitsvectoren, die im Raume von o aus gezogen sind, und es sei

$$q_1 = \frac{ob}{oa}, \quad q_2 = \frac{oc}{ob};$$

dann ist

$$q_2 q_1 = \frac{oc}{ob} \cdot \frac{ob}{oa} = \frac{oc}{oa}.$$

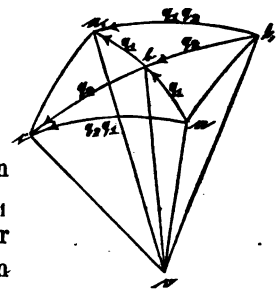

Fig. 20.

Denken wir uns nun oa_1 und oc_1 in den Ebenen oab und obc so gezogen, dass Winkel $aob = boa_1$ und Winkel $boc = c_1ob$ ist, so ist auch, wenn wir die Vectorenlängen wieder gleich der Einheit sein lassen,

$$q_1 = \frac{oa_1}{ob},$$

$$q_2 = \frac{ob}{oc_1}.$$

Daher haben wir

$$q_1 q_2 = \frac{oa_1}{ob} \cdot \frac{ob}{oc_1} = \frac{oa_1}{oc_1}.$$

Die Quaternionen

$$\frac{oc}{oa} \quad \text{und} \quad \frac{oa_1}{oc_1}$$

sind aber im Allgemeinen nicht einander gleich, obschon ihre Winkel und auch ihre Tensoren gleich sind, indem diese Quaternionen in verschiedenen Ebenen liegen, wenn q_1 und q_2 selbst verschiedene Ebenen haben. Für den Fall, dass q_1 und q_2 rechtwinklige Quaternionen sind in verschiedenen Ebenen, d. h. Quaternionen, deren Dividend und Divisor zu einander senkrechte Vectoren sind, für diesen Fall liegen freilich die Vectoren oa und oc mit oa_1 und oc_1 in einem Hauptkreis einer um o beschriebenen Kugelfläche, also in einer Ebene; aber eine genauere Betrachtung der Figur ergiebt dann, dass der Winkel aoc, der Winkel von $q_2\,q_1$, und $c_1\,o\,a_1$, der Winkel von $q_1\,q_2$, entgegengesetzte Drehung haben, dass die Quaternionen also wieder nicht einander gleich sind.

Nur wenn die Quaternionen q_1 und q_2 derselben oder parallelen Ebenen angehören, ist $q_1\,q_2 = q_2\,q_1$.

Man sieht diess z. B. dadurch, dass man die Vectoren oa, ob, oc der Fig. 20 in einer Ebene annimmt, die Construction von a_1 und c_1 wie oben ausführt und schliesslich als Producte findet $oc : oa$ und $oa_1 : oc_1$, Quotienten, die aber jetzt als derselben Ebene angehörig bei Gleichheit der Vectoren und der Grösse und Drehung der Winkel zu gleichen Versoren oder Quaternionen führen.

Wenn in dem Vorstehenden der Nachweis, dass das Resultat von $q_1\,q_2$ nicht allgemein gleich dem von $q_2\,q_1$ ist, unter Voraussetzung von gleichlangen Vectoren geführt wurde, d. h. eigentlich nur für Versoren, so ist derselbe leicht auch allgemein zu machen. Es ist nämlich

$$q_1\,q_2 = Tq_1 \,.\, Uq_1 \,.\, Tq_2 \,.\, Uq_2 = Tq_1 \,.\, Tq_2 \,.\, Uq_1 \,.\, Uq_2,$$

während

$$q_2\,q_1 = Tq_2 \,.\, Uq_2 \,.\, Tq_1 \,.\, Uq_1 = Tq_2 \,.\, Tq_1 \,.\, Uq_2 \,.\, Uq_1$$

ist, wo die Ungleichheit der rechten Seiten offenbar ist. Wenn wir dabei Versoren und Tensoren als commutative Factoren ansehen, so geschieht diess, weil die durch diese Factoren angedeuteten Operationen des Drehens und Streckens bis jetzt als vertauschbar gelten.

6. — Nachdem wir so die Nichtgiltigkeit des commutativen Princips bei der Multiplication von Quaternionen theils durch Definition festgestellt, theils bewiesen haben, fragt es sich, wie es mit den beiden anderen Principien steht, die bei der Rechnung mit algebraischen Ausdrücken angenommen werden, wir meinen das distributive Princip, wonach z. B.

$$(a+b)\,(c+d) = ac+bc+ad+cd$$

ist, sowie das associative Gesetz, wonach

$$(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$$

ist. Beide sind von Hamilton als für Quaternionen auch giltig bewiesen worden, das erstere freilich mit Annahme seiner Giltigkeit für den einfachen Fall, von dem wir ja auch schon Gebrauch gemacht, dass

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \alpha^{-1}\beta + \alpha^{-1}\gamma$$

$$= \alpha^{-1}(\beta + \gamma).$$

Wir werden vorläufig mit Kelland das distributive Princip als giltig annehmen und dann später mit Hilfe desselben einen Beweis für das associative Princip führen, obschon wir mit dem genannten Edinburger Professor beide durch Definition für die Rechnung mit Quaternionen feststellen könnten, da es keine Gründe giebt, die gegen die Richtigkeit dieser Principien auf dem Gebiete der Quaternionen sprechen.

§. 48. Die Elementarquaternionen.

1. — Unter den Quaternionen kommt denjenigen, deren Winkel ein rechter ist, eine eigenthümliche Wichtigkeit zu. Eine solche Quaternion kann man eine rechte oder eine rechtwinklige nennen, und ihren Versor einen rechten oder Quadranten-Versor. Da es uns gelingen wird, jede Quaternion mit Hilfe dreier solcher rechtwinkligen Quaternionen darzustellen, so kann man diese Quotienten auch als die Elemente der übrigen Quaternionen betrachten; wir werden sie daher auch Elementarquaternionen und ihre Versoren Elementarversoren heissen, und beide, wenn keine Verwechselung möglich, oft kurz Elementaren nennen.

Der algebraische Ausdruck für einen Elementarversor ist $\sqrt{-1}$, wie durch folgende Betrachtung klar wird. Sei ν eine solche Elementare, und α ein Vector in der Ebene derselben. Dann ist $\nu.\alpha$ ein zu α senkrechter Vector β von gleicher Länge wie α, und $\nu.\beta$ ist ein dritter zu β wieder senkrechter Vector γ. Da diese beiden Drehungen in der Ebene von ν erfolgen, so weicht γ um zwei Rechte von α ab, mit dem es übrigens gleiche Länge hat. Es ist daher $\gamma = -\alpha$. Wir haben also

$$\gamma = \nu\beta = \nu\nu\alpha = \nu^2\alpha = -\alpha.$$

Dasselbe Resultat hätten wir aber auch erhalten, wenn wir α mit $(\sqrt{-1})^2$ multiplicirt hätten, indem

$$\alpha\,(\sqrt{-1})^2 = \alpha\,(-1) = -\alpha$$

ist. Wir dürfen daher $\sqrt{-1}$ als eine Art Werth für einen Elementarversor ansehen. Dass wir aber nun nicht diese Versoren mit $\sqrt{-1}$ be-

zeichnen, hat seinen Grund darin, dass man diesem Symbole nicht ansieht, in welcher Ebene die durch den Versor bewirkte Drehung erfolgen soll, wol auch meinen könnte, alle Elementarversoren seien unter einander gleich. Es findet allerdings Gleichheit unter ihnen statt in Bezug auf die Grösse der Drehung, die für alle einen rechten Winkel beträgt; dagegen kann diese Drehung in verschiedenen Ebenen und in verschiedenem Sinne erfolgen. Wir ziehen daher vor, $\sqrt{-1}$ durch das bekannte i zu ersetzen, dem nun freilich gar nichts Imaginäres mehr anhaftet.

Es ist dasselbe vielmehr ein Operationssymbol, welches bei zweimaliger Anwendung als Factor die Richtung eines Vectors umdreht oder in die entgegengesetzte verwandelt, dessen Wirkung als einfacher Factor daher in einer Drehung um einen Rechten in einer gewissen Ebene besteht.

Um dann anzudeuten, dass um verschiedene Axen oder in verschiedenen Ebenen eine Drehung um einen Rechten erfolgen soll, bezeichnen wir die Quadratwurzeln aus -1 mit i_1, i_2, i_3 etc. In der Theorie der Quaternionen kommt daher $\sqrt{-1}$ eine unendliche Anzahl von Werthen zu.

Auch an einer Figur ist die vorstehende Erörterung leicht klar gemacht. Denken wir uns auf oa den Vector ob senkrecht und in der Ebene aob den Vector oc senkrecht auf ob, so jedoch, dass oa und oc auf entgegengesetzten Seiten von ob liegen, während die drei Vectoren von gleicher Länge sind; dann ist

$$v = \frac{ob}{oa} = \frac{oc}{ob},$$

daher

$$v^2 = \frac{oc}{ob} \cdot \frac{ob}{oa} = \frac{oc}{oa} = -1,$$

weil $oc = -oa$ ist. Es ist daher $v = \sqrt{-1} = i$. Da aber ob in unendlich viel Ebenen senkrecht zu oa sein kann, so ist i als Elementare vieldeutig, und es wird nöthig, diese verschiedenen Werthe etwa durch i_1, i_2 etc. zu unterscheiden, je nach der Ebene, in denen oa und ob liegen.

2. — Bezeichnen wir die Einheitskanten einer rechten Ecke mit

$$oa,\ ob,\ oc,$$

und die negativen Verlängerungen derselben über o hinaus von der Längeneinheit mit

$$oa_1,\ ob_1,\ oc_1,$$

wobei wir uns oa, ob und oc mit der positiven x, y und z Axe eines rechtwinkligen räumlichen Coordinatensystems zusammenfallend denken können, so giebt es ein System von Elementaren

$$i_1 = \frac{oc}{ob}, \quad i_2 = \frac{oa}{oc}, \quad i_3 = \frac{ob}{oa},$$

welche folgenden Gleichungen genügen. Es ist

$$i_1 i_2 = i_3, \quad i_2 i_3 = i_1, \quad i_3 i_1 = i_2,$$

während

$$i_2 i_1 = -i_3, \quad i_3 i_2 = -i_1, \quad i_1 i_3 = -i_2$$

ist. Endlich haben wir noch

$$i_1 i_2 i_3 = -1.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Beziehungen ergiebt sich folgendermassen. Es ist

$$i_1 = \frac{oc}{ob} = \frac{ob_1}{oc},$$

$$i_2 = \frac{oa}{oc} = \frac{oc}{oa_1},$$

daher

$$i_1 i_2 = \frac{ob_1}{oc} \cdot \frac{oc}{oa_1} = \frac{ob_1}{oa_1} = i_3.$$

Ferner ist

$$i_2 = \frac{oa}{oc} = \frac{oc_1}{oa},$$

$$i_3 = \frac{ob}{oa} = \frac{oa}{ob_1},$$

daher

$$i_2 i_3 = \frac{oc_1}{oa} \cdot \frac{oa}{ob_1} = \frac{oc_1}{ob_1} = i_1.$$

Endlich ist

$$i_3 = \frac{ob}{oa} = \frac{oa_1}{ob},$$

$$i_1 = \frac{oc}{ob} = \frac{ob}{oc_1}.$$

Mithin ist

$$i_3 i_1 = \frac{oa_1}{ob} \cdot \frac{ob}{oc_1} = \frac{oa_1}{oc_1} = i_2.$$

Es ist aber auch

$$i_2 = \frac{oa}{oc}, \quad i_1 = \frac{oc}{ob},$$

also

$$i_2 i_1 = \frac{oa}{oc} \cdot \frac{oc}{ob} = \frac{oa}{ob} = \frac{1}{i_3} = \frac{i_3}{i_3^2} = -i_3.$$

Ebenso ist

$$i_3 = \frac{ob}{oa}, \quad i_2 = \frac{oa}{oc},$$

folglich

$$i_3 i_2 = \frac{ob}{oa} \cdot \frac{oa}{oc} = \frac{ob}{oc} = \frac{1}{i_1} = -i_1.$$

Schliesslich folgt aus

$$i_1 = \frac{oc}{ob}, \quad i_3 = \frac{ob}{oa},$$

dass

$$i_1 i_3 = \frac{oc}{ob} \cdot \frac{ob}{oa} = \frac{oc}{oa} = \frac{1}{i_2} = -i_2.$$

Aus

$$i_1 i_2 = i_3$$

und

$$i_3 = i_3$$

folgt durch Multiplication der zweiten Gleichung durch die erste

$$i_1 i_2 i_3 = i_3^2 = -1.$$

Die letzte Gleichung kann benutzt werden zum Nachweis des associativen Principes für das Product $i_1 i_2 i_3$. Es ist nämlich

$$(i_1 i_2) i_3 = i_3 i_3 = -1;$$

es ist aber auch

$$i_1 (i_2 i_3) = i_1 i_1 = -1,$$

mithin

$$(i_1 i_2) i_3 = i_1 (i_2 i_3).$$

Unter Zuziehung dieses Principes kann man aber aus dem Gleichungssysteme

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1$$

alle anderen obigen Gleichungen ableiten. So ist z. B.

$$i_1 i_2 = -i_1 i_2 . i_3^2 = -i_1 i_2 i_3 . i_3 = i_3,$$

und

$$i_2 i_1 = i_2 . i_2 i_3 = i_2^2 i_3 = -i_3.$$

Endlich ist

$$i_3 i_2 i_1 = (i_3 i_2) i_1 = -i_1 i_1 = +1.$$

Den Elementaren i_1, i_2 und i_3 kommt darum eine besondere Wichtigkeit zu, weil es uns gelingen wird, mit ihrer Hilfe eine jede Quaternion als einen viergliedrigen Ausdruck darzustellen in der Gestalt

$$q = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z.$$

3. — Es sind übrigens die oben stehenden von Hamilton zuerst aufgestellten Beziehungen nur besondere Fälle von den allgemeinen Gleichungen, die man erhält, wenn man in einer beliebigen dreiseitigen Ecke, mit den Einheitsvectoren

$$oa, \quad ob \quad \text{und} \quad oc$$

als Kanten, die Versoren

$$\frac{oc}{ob}, \quad \frac{oa}{oc}, \quad \frac{ob}{oa}$$

bezüglich mit

$$j_1, \quad j_2, \quad j_3$$

bezeichnet. Dann ist

$$j_3 j_2 = \frac{ob}{oa} \cdot \frac{oa}{oc} = \frac{ob}{oc} = \frac{1}{j_1},$$

daher

$$j_3 j_2 j_1 = 1.$$

Ebenso findet man

$$j_2 j_1 = \frac{oa}{oc} \cdot \frac{oc}{ob} = \frac{oa}{ob} = \frac{1}{j_3},$$

oder $$j_2 j_1 j_3 = 1,$$
und endlich auf demselben Wege
$$j_1 j_3 j_2 = 1.$$

Aus diesen allgemeinen Versorenbeziehungen ergeben sich als besondere Fälle
$$i_3 i_2 i_1 = 1, \quad i_2 i_1 i_3 = 1, \quad i_1 i_3 i_2 = 1.$$
die man aber auch leicht mit Hilfe der in (2.) gegebenen Grundformeln direct herleiten kann.

Den vorstehenden Producten lässt sich ein einfacher geometrischer Ausdruck unterlegen. Betrachten wir auf der mit der Einheit als Radius um o beschriebenen Kugel die Bogen ab, bc und ca als Repräsentanten der Versoren j_3, j_1 und j_2, so lässt sich das Product
$$j_3 j_2 = j_1^{-1}$$
auch ausdrücken durch
$$ab \,.\, ca = cb,$$
d. h. das Product zweier Seiten im sphärischen Dreiecke ist gleich der dritten Seite, ein Satz, den Hamilton mehrfach verwendet zur Veranschaulichung von Eigenschaften der Versoren.

Als algebraischen Ausdruck für einen solchen Versor j lässt sich, wenn λ der Winkel desselben ist, allgemein
$$(-1)^{\frac{\lambda}{\pi}}$$
nachweisen.

Denn ist $\lambda = \frac{\pi}{n}$, so lässt sich π in n gleiche Winkel zerlegen, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Seien nun oa, ob_1, ob_2 ... ob_n die aufeinanderfolgenden Schenkel der n Theilwinkel von π, so ist
$$j = \frac{ob_1}{oa} = \frac{ob_2}{ob_1} \cdots = \frac{ob_n}{ob_{n-1}},$$
daher
$$j^n = \frac{ob_n}{ob_{n-1}} \cdot \frac{ob_{n-1}}{ob_{n-2}} \cdots \cdot \frac{ob_1}{oa} = \frac{ob_n}{oa} = -1,$$
da $ob_n = -oa$ ist. Daher ist
$$j = (-1)^{\frac{1}{n}} = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}}.$$

Die Ausdehnung dieser Formel auf gebrochene und irrationale Werthe von $n = \pi : \lambda$ bietet keine grossen Schwierigkeiten.

§. 49. Theorie der Indices der Quaternionen.

1. — Ein auf der Ebene einer Quaternion, d. h. auf der durch α und β bestimmten Ebene errichteter senkrechter Strahl heisst die Axe

der Quaternion. Man kann sich dieselbe im Anfangspunkte von α und β angebracht denken und zwar auf der positiven Seite der Ebene $\alpha\beta$, d. h. auf der Seite, von wo aus ein auf der Ebene stehender Beobachter die Drehung des Schenkels α nach β zur Beschreibung des Winkels $\alpha\beta$ in der Normalrichtung, nämlich in der Richtung der Zeiger einer Uhr, vor sich gehen sieht. Anstatt die Axe unbegrenzt zu lassen, kann man derselben eine Länge geben, welche sich zur Längeneinheit verhält wie b zu a, deren Länge mithin so viel Einheiten beträgt, als der Tensor der Quaternionen angiebt. Eine solche auf der positiven Seite der Ebene im Scheitel des Winkels $\alpha\beta$ errichtete Senkrechte von der angegebenen Länge heisst der Index der Quaternion. Durch Zeichen lässt sich diess so ausdrücken. Es ist

$$\mathrm{TI}q = \mathrm{T}q.$$

Es bedeutet nämlich das Zeichen T die absolute Zahl oder Grösse, die dem Index zukommt, und diese soll gleich der Zahl sein, die wir den Tensor der Quaternion nannten, nämlich gleich b : a oder $\mathrm{T}\beta : \mathrm{T}\alpha$. Der Tensor des Index ist also gleich dem Tensor der Quaternion. Dass wir nicht sagen, der Index sei gleich dem Tensor der Quaternion, hat seine Berechtigung. Zum Wesen des Index gehört nämlich nicht bloss die Grösse desselben, sondern auch seine Richtung; er ist ja ein Vector, d. h. eine Strecke mit einer gewissen Richtung.

2. — Der Index einer Quaternion bestimmt die Stellung der Ebene der Quaternion und überdiess ihren Tensor, sowie den Sinn der Drehung des Vectors α, um den Winkel $\alpha\beta$ zu beschreiben. Zur vollständigen Charakterisirung der Quaternion fehlt nur noch eine Angabe über die Grösse des Winkels derselben. Da aber ein Vector zu seiner vollständigen Bestimmung nur Angabe seiner Grösse, seiner Richtung und des Sinnes bedarf, in welchem er durchlaufen wird, so sehen wir, dass der einfache Index nicht ausreicht, um eine beliebige Quaternion unzweideutig darzustellen. Lassen wir jedoch eines der Elemente der Quaternion aus dem Spiel, indem wir etwa nur geometrische Quotienten ins Auge fassen, bei welchen dieses Element dasselbe ist, so kann der Index als Vertreter dieser Art Quaternionen dienen. Als solches für die Quaternionen gleich anzunehmende Element empfiehlt sich der Winkel. Dabei ist es einerlei, welchen Winkel man als Normalwinkel festsetzt. Hamilton hat den rechten Winkel gewählt. Für rechtwinklige Quaternionen, d. h. für Elementaren, ist der Index vollständig ausreichend, um die Quaternion zu bestimmen. Die Richtung und der Sinn des Indexvectors bezeichnen die Stellung der Ebene und ihre positive Seite, und das Verhältniss des Index zur Längeneinheit giebt den Tensor der Quaternion an, deren Winkel gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist nach der Voraussetzung.

3. — Für Elementaren lassen sich nun leicht folgende Sätze aufstellen.

(I.) Zu gleichen Elementaren gehören (nach Grösse und Richtung) gleiche Indices, und umgekehrt, Sätze, die sich sofort aus der Definition des Index einer Quaternion und aus dem Satze über die Aequivalenz gleich gerichteter Strecken von gleicher Länge ergeben.

(II.) Die Summe der Indices zweier Elementaren ist gleich dem Index der Summe dieser Quaternionen, d. h. in Zeichen

$$\mathrm{I}q_1 + \mathrm{I}q_2 = \mathrm{I}(q_1 + q_2).$$

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich leicht durch eine Construction nachweisen. Gesetzt nämlich die Elementaren q_1 und q_2 seien

$$q_1 = \frac{\beta}{\alpha}\ ; \qquad q_2 = \frac{\delta}{\gamma}.$$

Nehmen wir dann in der Schnittlinie der Ebenen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ eine Strecke μ gleich der Längeneinheit, und β_1 und δ_1, so dass

$$\beta_1 : \mu = \beta : \alpha,$$
$$\delta_1 : \mu = \delta : \gamma,$$

wodurch schon von selbst nöthig, dass β_1 und δ_1 in den Ebenen $\alpha\beta$ resp. $\gamma\delta$ liegen, dann ist

$$q_1 = \frac{\beta_1}{\mu}\ , \qquad q_2 = \frac{\delta_1}{\mu}.$$

Da die Divisoren hierin gleich der Längeneinheit, so ist Index von q_1 der Länge nach gleich β_1, und Index von q_2 längengleich mit δ_1, oder in Zeichen

$$\mathrm{T}\mathrm{I}q_1 = \mathrm{T}\beta_1, \quad \mathrm{T}\mathrm{I}q_2 = \mathrm{T}\delta_1.$$

Um nun $q_1 + q_2$ zu finden, bilden wir, da

$$q_1 + q_2 = \frac{\beta_1 + \delta_1}{\mu}$$

ist, die geometrische Summe von $\beta_1 + \delta_1$. Da ferner $\mathrm{I}q_1$ und $\mathrm{I}q_2$ senkrecht sind auf β_1 resp. δ_1 und zugleich mit β_1 und δ_1 senkrecht auf μ, so liegen β_1, δ_1, $\mathrm{I}q_1$, $\mathrm{I}q_2$ in einer Ebene, und $\mathrm{I}q_1$ bildet mit $\mathrm{I}q_2$ denselben Winkel wie β_1 mit δ_1. Es ist daher $\mathrm{I}q_1 + \mathrm{I}q_2$ an Grösse gleich $\mathrm{T}\beta_1 + \mathrm{T}\delta_1$, und auch senkrecht auf $\beta_1 + \delta_1$, wie sich aus der Betrachtung der congruenten Dreiecke ergiebt. Mithin ist

$$\mathrm{I}q_1 + \mathrm{I}q_2 = \mathrm{I}(q_1 + q_2).$$

Auf dieselbe Art lässt sich nachweisen, dass

$$\mathrm{I}q_1 - \mathrm{I}q_2 = \mathrm{I}(q_1 - q_2).$$

(III.) Da $\mathrm{I}q_1$ und $\mathrm{I}q_2$ mit β_1 und δ_1 in einer Ebene liegen, so lässt sich leicht zeigen, dass

$$q_1 : q_2 = \frac{\beta_1}{\mu} : \frac{\delta_1}{\mu} = \frac{\beta_1}{\delta_1} = \mathrm{I}q_1 : \mathrm{I}q_2,$$

indem Iq_1 und Iq_2 dieselben Längen haben wie die Vectoren β_1 und δ_1, und weil auch der Winkel zwischen den beiden Indices gleich dem Winkel $\beta_1 \delta_1$ ist.

4. — Welcher Zusammenhang findet sich aber zwischen dem Producte zweier Elementaren und dem Producte ihrer Indices? Diese Frage führt auf die andre Frage, nach der Bedeutung des Productes zweier Vectoren. Wir haben bis jetzt die Summe, die Differenz und den Quotienten von zwei Vectoren betrachtet; die Verbindung solcher Strecken zu Producten haben wir dagegen noch nicht untersucht. Um für dieses Product ein Resultat zu erlangen, definirt Hamilton geradezu das Product der Indices zweier Elementaren als gleich dem Product der zugehörigen Elementaren selbst, d. h.

$$Iq_1 \,.\, Iq_2 = q_1 \,.\, q_2,$$

mit anderen Worten, um das Product zweier Vectoren α und β zu finden, suchen wir die Elementaren, wovon α und β die Indices sind, multipliciren diese mit einander und betrachten ihr Product als das Product der Vectoren α und β.

5. — Nachdem wir so für rechte Quaternionen oder Elementaren die Richtigkeit von

$$Iq_1 \pm Iq_2 = I(q_1 \pm q_2)$$
$$Iq_1 : Iq_2 = q_1 : q_2$$

nachgewiesen, und nachdem wir durch Definition festgestellt, dass

$$Iq_1 \,.\, Iq_2 = q_1 \,.\, q_2,$$

da drängt sich die Möglichkeit einer Identificirung der Elementaren mit ihren Indices auf. Es geschieht diess dadurch, dass wir den Quotienten zweier zu einander rechtwinkligen Vectoren gleich dem Index dieser Elementaren setzen, und umgekehrt, dass wir einen Vector μ als Factor gleich setzen der Elementaren, wovon μ der Index ist. In Zeichen wird man diess ausdrücken durch

$$\mu = I^{-1}\mu,$$

indem man nach dem Vorgang der Engländer, wenn

$$Iq = \mu,$$
$$q = I^{-1}\mu$$

setzt. Im Anschluss an die in deutschen Werken gebräuchliche Bezeichnung, wonach der englische Ausdruck $\sin^{-1} x$ gleich arc sin x ist, könnte man auch schreiben als Umkehrung der Gleichung

$$Iq = \mu,$$
$$q = QI(=\mu) = QI\mu,$$

wenn wir mit Q einmal die Operation der Quaternionenbildung bezeichnen. Die Gleichung liesse sich lesen: q ist gleich Quaternion Index μ.

Die für den Anfang etwas befremdende Einführung der Indices statt der Elementarquaternionen, d. h. also das Ersetzen des Quotienten zweier zu einander rechtwinkligen Vectoren durch einen dritten zu den beiden ersten senkrechten Vector, wird ihr Auffälliges verlieren, wenn wir sehen, wie gerade hierdurch eine grosse Einfachheit im Quaternionencalcul erzielt wird, und wie man unter dieser Annahme zu widerspruchsfreien Resultaten gelangt. Ueberdiess könnte man an etwas Analoges hier erinnern. Bei der Darstellung der Zahlen in unsrem auf die Grundzahl 10 basirten Zahlensystem findet ja auch ein Ersetzen statt: wir meinen die Schreibweise, wonach 3 4 5, welches $3 . 10^2 + 4 . 10 + 5$ ist, unter Weglassung der Potenzen von 10 und der Pluszeichen einfach durch Nebeneinandersetzen der Coefficienten der Potenzen der Grundzahl hergestellt ist. Diese Vereinfachung ist nur desshalb zulässig, weil alle weiteren Rechnungen in unsrem Zahlensystem mit Berücksichtigung derselben erfolgen; sie ist aber in Wirklichkeit angenommen und durchgeführt worden, weil dadurch gerade die Rechnungen mit diesen Zahlen selbst sehr einfach werden. Quaternionen sind aber ebenfalls eine Art Zahlen; es sind zusammengesetzte Werthe, welche nicht nur die Grössenbeziehung zweier Vectoren ausdrücken, sondern auch die Differenz in der Richtung derselben zum Ausdruck bringen. In ihrer völlig entwickelten Form sind dieselben viergliedrige Ausdrücke mit den Einheiten 1, i_1, i_2 und i_3, wie wir noch sehen werden. Wenn wir nun diese complicirten Verbindungen theilweise durch Einführung der Indices einfacher darstellen, so muss diess jedenfalls gestattet sein, falls die weiteren Rechnungen mit Berücksichtigung dieser Annahme richtig durchgeführt werden.

6. — Aus der Gleichsetzung einer Elementaren mit einem Vector ergeben sich nun eine Reihe wichtiger Folgerungen.

Da wir früher für die zu einander senkrechten Einheitsvectoren oa, ob und oc gesetzt haben

$$\frac{oc}{ob} = i_1, \quad \frac{oa}{oc} = i_2, \quad \frac{ob}{oa} = i_3,$$

so dürfen wir jetzt diese Elementaren i_1, i_2 und i_3 als identisch betrachten mit ihren Indices, d. h. als drei Einheitsvectoren, die bezüglich in die Richtungen der x, y und z Axen eines rechtwinkligen räumlichen Axensystemes fallen.

Da ferner die Gleichungen

$$i_1 i_2 = i_3, \quad i_2 i_3 = i_1, \quad i_3 i_1 = i_2$$

jetzt ausdrücken, dass das Product zweier zu einander senkrechten Einheitsvectoren ein dritter auf (der positiven Seite) der Ebene der Factoren senkrechter Einheitsvector ist, so haben wir damit den Satz, dass nicht

bloss der Quotient, sondern auch das Product zweier zu einander senkrechten Einheitsvectoren ein dritter zu ihrer Ebene senkrechter Vector ist.

Die Multiplication eines Vectors β mit einem dazu senkrechten Einheitsvector α dreht also den Multiplicand um einen rechten Winkel in der zum Multiplicator senkrechten Ebene. Multipliciren wir den Multiplicand in der neuen Lage wieder mit α, d. h. bilden wir $\alpha^2 . \beta$, so wird β nochmals um einen Rechten weiter gedreht und damit in $-\beta$ übergeführt.

Es ist also

$$\alpha^2 . \beta = -\beta,$$

woraus sich α^2 als gleich -1 ergiebt, d. h. das Quadrat eines Einheitsvectors ist gleich -1. Um das Quadrat eines Vectors α zu finden, dessen Länge nicht gleich der Einheit ist, setzen wir

$$\alpha = \mathrm{T}\alpha . \mathrm{U}\alpha,$$

worin $\mathrm{U}\alpha$ die Längeneinheit in der Richtung α bedeutet. Dann ist

$$\alpha^2 = (\mathrm{T}\alpha)^2 (\mathrm{U}\alpha)^2 = (\mathrm{T}\alpha)^2 (-1) = -(\mathrm{T}\alpha)^2.$$

Ebenso können wir das Product zweier zu einander senkrechten Vectoren α und β, deren Längen nicht gleich der Einheit sind, ausdrücken durch

$$\alpha . \beta = \mathrm{T}\alpha \, \mathrm{U}\alpha . \mathrm{T}\beta \, \mathrm{U}\beta = \mathrm{T}\alpha \, \mathrm{T}\beta . \mathrm{U}\alpha \, \mathrm{U}\beta = \mathrm{T}\alpha \, \mathrm{U}\beta . \mathrm{i}_1 \mathrm{i}_2 = \mathrm{T}\alpha \, \mathrm{T}\beta \, \mathrm{i}_3,$$

d. h. auch das Product beliebig langer zu einander senkrechten Vectoren ist ein zu den beiden Factoren senkrechter Vector, dessen Tensor gleich dem Product der Tensoren der Factoren ist. Wenn wir dabei vorher $\mathrm{U}\alpha$ und $\mathrm{U}\beta$ mit i_1 und i_2 bezeichneten, so ist diess deshalb gestattet, weil i_1 und i_2 ja nach §. 47, 2 zwei zu einander rechtwinklige Elementaren, resp. deren Indices sind.

Das Product zweier nicht zu einander senkrechten Vectoren ist nicht einfach durch einen dritten Vector darstellbar. Wir werden dasselbe in Form einer Quaternion und als Potenz eines Vectors später entwickeln. Aehnliches gilt von dem Producte von mehr als zwei Vectoren; dasselbe ist im Allgemeinen nur durch eine Quaternion ausdrückbar.

§. 50. Zerlegung einer Quaternion in eine Summe.

1. — Denkt man sich in der Ebene $\alpha\beta$ den Vector β zerlegt in die beiden Theile β_1 und β_2, von denen β_1 in die Richtung von α fällt, β_2 aber senkrecht dazu ist, so haben wir

$$\beta = \beta_1 + \beta_2,$$

und

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha}.$$

Von den beiden rechts stehenden Theilen ist $\frac{\beta_1}{\alpha}$ ein Scalar, da β_1 in der

Richtung von α liegt. Sein Werth ist $\cos\varphi$, wenn φ den Winkel $\alpha\beta$ angiebt, und α und β selbst Einheitsvectoren sind. Der zweite Quotient dagegen ist eine rechte Quaternion, mithin gleich einem zu α und β_2 oder zu α und β senkrechten Vector, dessen Tensor $\sin\varphi$ ist. Nennen wir nun i den zu α und β senkrechten Einheitsvector, durch Rotation um welchen der Winkel φ beschrieben wird, so ist

$$\frac{\beta_2}{\alpha} = \mathrm{i}\sin\varphi,$$

mithin

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Sind β' und α' nicht Einheitsvectoren, sondern

$$\alpha' = \mathrm{a}\,.\,\alpha = \mathrm{T}\alpha'\,.\,\alpha,$$
$$\beta' = \mathrm{b}\,.\,\beta = \mathrm{T}\alpha'\,.\,\beta,$$

so ist

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\mathrm{T}\beta'}{\mathrm{T}\alpha'}\,.\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{T}\beta'}{\mathrm{T}\alpha'}\,.\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Da

$$\mathrm{q} = \frac{\beta}{\alpha} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

die Eigenschaft hat, dass

$$\mathrm{q}\,.\,\alpha = \frac{\beta}{\alpha}\,.\,\alpha = \beta,$$

so muss auch

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

diese Eigenschaft haben. Es ist also $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ ein Versor, der um eine Axe in der Richtung von i um den Winkel φ dreht.

Und wenn β und α Vectoren von beliebiger Länge sind, so ist in

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$\frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha} = \mathrm{Tq},\ \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{Uq}.$$

In den vorstehenden Ausdrücken nennt man nach Hamilton

$$\frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha}\,.\,\cos\varphi$$

den Scalartheil oder den Scalar der Quaternion $\beta : \alpha$, während

$$\frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha}\sin\varphi\,.\,\mathrm{i}$$

der Vectortheil oder auch kurz der Vector der Quaternion heisst. Man bezeichnet den ersteren mit Sq, den letzteren mit Vq, so dass also ganz allgemein

$$\mathrm{q} = \mathrm{Sq} + \mathrm{Vq}$$

ist. Diese Summe reducirt sich auf Sq, wenn α und β derselben Richtung

angehören; sie wird dagegen zu Vq, d. h. zu einem Vector, wenn α senkrecht zu β ist.

2. — Aber nicht bloss den Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ zweier Vectoren gelingt es, in Scalar und Vector zu zerlegen, diess gilt auch von dem Producte $\alpha\beta$. Denn es seien α und β wieder Einheitsvectoren, und ebenso γ ein Einheitsvector, der in der Ebene $\alpha\beta$ senkrecht zu β so gezogen, dass die Drehungsrichtung des rechten Winkels $\gamma\beta$ dieselbe ist, wie die von α nach β. Dann ist, wie man leicht an einer Figur sieht,

$$\alpha = \beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi,$$

wenn φ der Winkel zwischen α und β ist. Es ist mithin

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)\,\beta \\ &= \beta^2\cos\varphi + \gamma\beta\sin\varphi \\ &= -\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi,\end{aligned}$$

wenn i der zur Ebene $\alpha\beta$ senkreckte Einheitsvector ist.

Sind α und β nicht Einheitsvectoren, so ist leicht zu zeigen, dass

$$\alpha\,.\,\beta = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta\,.\,(-\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Es ist daher

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\alpha\beta &= -\mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta\cos\varphi, \\ \mathrm{V}\alpha\beta &= \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta\sin\varphi\,.\,\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Der Factor von i in $\mathrm{V}\alpha\beta$, d. h. $\mathrm{TV}\alpha\beta$ ist der doppelte Inhalt des Dreiecks mit den Seiten α und β.

3. — Um das Product $\beta\alpha$ der Einheitsvectoren β und α zu finden, setzen wir wie in (2.)

$$\alpha = \beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\beta\alpha &= \beta^2\cos\varphi + \beta\gamma\sin\varphi \\ &= -\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi,\end{aligned}$$

indem das Product $\beta\gamma$ der zu einander senkrechten Einheitsvectoren das entgegengesetzte Zeichen hat wie $\gamma\beta$, wie aus den früher über $\mathrm{i}_1\,\mathrm{i}_2$ und $\mathrm{i}_2\,\mathrm{i}_1$ festgestellten Regeln folgt, wie sich aber auch leicht daraus ergiebt, dass $\beta\gamma$ eine Drehung von γ um $^1/_2\pi$ bedeutet, $\gamma\beta$ dagegen eine Drehung des β um denselben Winkel. Dadurch werden die zu drehenden Vectoren in Lagen geführt, die derselben Geraden angehören, aber entgegengesetzte Richtungen haben.

Aus Vorstehendem ergiebt sich, dass

1) $\mathrm{S}\alpha\beta = \mathrm{S}\beta\alpha$,
2) $\mathrm{V}\alpha\beta = -\mathrm{V}\beta\alpha$,
3) $\alpha\beta + \beta\alpha = 2\mathrm{S}\alpha\beta$,
4) $\alpha\beta - \beta\alpha = 2\mathrm{V}\alpha\beta$,
5) $\mathrm{S}\alpha\beta = 0$,

letzteres nur, wenn α senkrecht zu β ist.

$$6) \quad (\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta)$$
$$= \alpha^2 + \beta\alpha + \alpha\beta + \beta^2$$
$$= \alpha^2 + 2\,\mathrm{S}\alpha\beta + \beta^2.$$
$$7) \quad (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\,\mathrm{S}\alpha\beta + \beta^2.$$
$$8) \quad \alpha^2\beta^2 = \alpha.\alpha.\beta.\beta = \alpha.\beta.\beta.\alpha,$$

weil β^2 ein Scalar ist. Daher

$$\alpha^2\beta^2 = (\mathrm{S}\alpha\beta + \mathrm{V}\alpha\beta)\,(\mathrm{S}\alpha\beta - \mathrm{V}\alpha\beta)$$
$$= (\mathrm{S}\alpha\beta)^2 - (\mathrm{V}\alpha\beta)^2.$$

Dabei ist $\alpha^2\beta^2$ nicht zu verwechseln mit $(\alpha\beta)^2$.

3. — Der Moivre'sche Satz. Haben wir in der Ebene $\alpha\beta$ noch einen Vector γ, so ist $\cos\alpha\beta + \mathrm{i}\sin\alpha\beta$ ein Versor, der durch Multiplication einen Vector in der Ebene von i um den Winkel $\alpha\beta$ dreht, und ebenso ist

$$\cos\beta\gamma + \mathrm{i}\sin\beta\gamma$$

ein Versor, der um den Winkel $\beta\gamma$ dreht.

Daher ist

$$(\cos\beta\gamma + \mathrm{i}\sin\beta\gamma)\,(\cos\alpha\beta + \mathrm{i}\sin\alpha\beta) = \cos\alpha\gamma + \mathrm{i}\sin\alpha\gamma,$$

ganz in Uebereinstimmung mit

$$\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Diess ist aber der Moivre'sche Satz.

Die vorstehende Ableitung zeigt übrigens auch noch, dass für Quaternionen derselben Ebene, d. h. für complanare Quaternionen das commutative Princip bei der Multiplication gilt, indem jetzt

$$q_1\,q_2 = q_2\,q_1$$

ist.

Festzuhalten ist die vollständige Verschiedenheit des i in seiner gegenwärtigen reellen Bedeutung als eines auf der Ebene $\alpha\beta$ senkrechten Einheitsvectors gegenüber den Annahmen der älteren Theorien des Imaginären und der complexen Ausdrücke, wonach i eine in der Ebene $\alpha\beta$ zu α senkrechte Länge bezeichnet.

4. — Während Multiplication eines Vectors mit i eine Drehung des Vectors um einen Rechten bedeutet, führt Multiplication mit i^2, i^3 ... i^n zu Drehungen um 2, 3 ... n Rechte. Dagegen erzeugt die Multiplication mit

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

nur eine Drehung um den sovielten Theil eines Rechten als $\varphi : {}^1/_2\pi$ oder $2\varphi : \pi$ angiebt. Wie man nun die Drehung um ganze Rechte durch i^2, i^3 ... bewirkt, so kann man auch

$$\mathrm{i}^{\frac{2\varphi}{\pi}}$$

als Factor annehmen, durch Multiplication mit welchem eine Drehung um den Winkel φ bewirkt wird. Dabei ist i ein Einheitsvector. Lässt man dagegen einen Vector α von beliebiger Länge an die Stelle von i treten, so kann

$$\alpha^t$$

jede Quaternion Vq darstellen. Ich brauche nur

$$\alpha = T\alpha \,.\, U\alpha$$

so zu wählen, dass

$$(T\alpha)^t = Tq,$$

d. h. dass

$$T\alpha = \sqrt[t]{Tq}$$

ist, und $(U\alpha)^t$ so dass es eine Drehung bewirkt, die gleich $\sphericalangle$ q ist. Diess geschieht dadurch, dass wir

$$t = \frac{2\varphi}{\pi} = \frac{2\sphericalangle q}{\pi}$$

setzen.

Damit wäre aber jede Quaternion darstellbar geworden als Potenz eines Vectors, und umgekehrt jede Potenz eines Vectors durch eine Quaternion.

Es ist so eine Art Abschluss in die Rechnung mit Vectoren gebracht. Während der §. 43 lehrte Vectoren zu addiren und zu subtrahiren, vermögen wir jetzt mit Vectoren die Rechnungen der zweiten und theilweise der dritten Stufe vorzunehmen. Das Product und der Quotient zweier Vectoren haben sich als Quaternionen ergeben, und indem wir für jede Quaternion nun einen Ausdruck von der Form

$$\alpha^t$$

gefunden haben, worin α einen Vector, t aber eine reelle Zahl bedeutet, sind also Producte und Quotienten von Vectoren immer darstellbar durch Potenzen von Vectoren, und führt auch die Rechnung mit den Potenzen dieser Vectoren wieder zu Vectorenpotenzen. Gerade aus der Bedeutung von α^t als Vertreter einer Quaternion ergiebt sich leicht das Grundgesetz für Potenzen

$$\alpha^{t_1} \,.\, \alpha^{t_2} = \alpha^{t_1 + t_2}$$

als giltig.

In Bezug auf den Logarithmus und andre transscendente Functionen der Quaternionen müssen wir auf Hamilton's Werk Elements of Quaternions verweisen.

§. 51. Zerlegung einer Quaternion in eine viergliedrige Normalform.

1. — Nach den Lehren des vorigen Paragraphen ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha} = S\frac{\beta}{\alpha} + V\frac{\beta}{\alpha},$$

worin

$$\mathrm{V}\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{I}\frac{\beta_2}{\alpha}$$

ein zur Ebene der Quaternion senkrechter Vector ist, von der Grösse

$$\frac{\mathrm{T}\beta_2}{\mathrm{T}\alpha} = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha} \cdot \sin \alpha\beta.$$

Denken wir uns nun ein rechtwinkliges räumliches Axensystem, welches seinen Anfang etwa in dem Anfangspunkte von α und β hat, und zerlegen den Index

$$\mathrm{I}\frac{\beta_2}{\alpha} = \mathrm{V}\frac{\beta}{\alpha}$$

nach den drei Axen in die Componenten

$$\mathrm{x}\,\mathrm{i}_1, \quad \mathrm{y}\,\mathrm{i}_2, \quad \mathrm{z}\,\mathrm{i}_3,$$

wobei i_1, i_2 und i_3 die drei Einheitsvectoren in den Richtungen der Axen, x, y und z dagegen die Tensoren oder Längenzahlen der Projectionen von $\mathrm{I}\frac{\beta_2}{\alpha}$ auf die drei Axen sind: so ist

$$\mathrm{I}\frac{\beta_2}{\alpha} = \mathrm{V}\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{x}\,\mathrm{i}_1 + \mathrm{y}\,\mathrm{i}_2 + \mathrm{z}\,\mathrm{i}_3.$$

Bezeichnen wir ausserdem den Scalartheil der Quaternionen mit w, so ist

$$\mathrm{q} = \frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{w} + \mathrm{x}\,\mathrm{i}_1 + \mathrm{y}\,\mathrm{i}_2 + \mathrm{z}\,\mathrm{i}_3$$

eine viergliedrige Form, auf welche jede Quaternion gebracht werden kann, und die wir daher ihre Normalform nennen wollen. Dabei ist

$$\mathrm{w} = \mathrm{T}\frac{\beta}{\alpha} \cdot \cos\varphi,$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{T}\frac{\beta}{\alpha} \cdot \sin\varphi \cos\varphi_1,$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{T}\frac{\beta}{\alpha} \cdot \sin\varphi \cos\varphi_2,$$

$$\mathrm{z} = \mathrm{T}\frac{\beta}{\alpha} \cdot \sin\varphi \cos\varphi_3,$$

wenn φ der Winkel $\alpha\beta$ ist, φ_1, φ_2, φ_3 aber die Winkel bedeuten, welche $\mathrm{V}\frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{I}\frac{\beta_2}{\alpha}$ mit den Axen x, y und z bildet, oder auch die Winkel, welche die Ebene $\alpha\beta$ mit den drei Coordinatenebenen yz, zx, xy macht. Daher haben wir auch

$$\mathrm{q} = \frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{T}\frac{\beta}{\alpha} \cdot [\cos\varphi + \sin\varphi\,(\mathrm{i}_1 \cos\varphi_1 + \mathrm{i}_2 \cos\varphi_2 + \mathrm{i}_3 \cos\varphi_3)].$$

Die in der Normalform der Quaternionen vorkommenden Einheitsvectoren i_1, i_2, i_3 sind zugleich Elementarversoren, für die Rechnung mit

welchen die früher festgestellten Gesetze gelten. Dieselben haben hier durchaus nicht den Charakter imaginärer Grössen. Sie sind im Gegentheil reelle Einheitsvectoren in der Richtung der drei Axen, denen freilich wie der Wurzel $\sqrt{-1}$ die Eigenthümlichkeit zukommt, dass ihr Quadrat gleich -1 ist.

2. — Aus der Normalform der Quaternion ergeben sich leicht die Ausdrücke für den Scalar- und Vectortheil derselben. Wenn

$$q = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z,$$

so ist

$$Sq = w,$$
$$Vq = i_1 x + i_2 y + i_3 z.$$

Auch für den Tensor und Versor von q finden sich eigenthümliche Werthe. Es ist aus

$$q = T\frac{\beta}{\alpha} \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

$$Sq = T\frac{\beta}{\alpha} \cdot \cos\varphi = \frac{b}{a}\cos\varphi,$$

$$Vq = T\frac{\beta}{\alpha} \cdot \sin\varphi \cdot i = \frac{b}{a}\sin\varphi \cdot i.$$

Daher ist

$$TVq = \frac{b}{a}\sin\varphi,$$

und

$$(TVq)^2 = \frac{b^2}{a^2}\sin\varphi^2 = -(Vq)^2.$$

Aus der in (1.) gezeigten Herleitung des Scalar- und Vectortheils von q ergiebt sich die Beziehung

$$(Tq)^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{b_1^2 + b_2^2}{a^2} = (TSq)^2 + (TVq)^2$$
$$= (Sq)^2 - (Vq)^2,$$

indem der Tensor eines Scalars dieser Scalar selbst ist, so dass $TSq = Sq$.

3. — Um Tq direct aus den constituirenden Bestandtheilen von q zu berechnen, setzen wir

$$\begin{aligned}(Vq)^2 &= (Vq) \cdot (Vq)\\ &= i_1^2 x^2 + i_1 i_2 x y + i_1 i_3 x z + i_2 i_1 x y + i_2^2 y^2\\ &\quad + i_2 i_3 y z + i_3 i_1 x z + i_3 i_2 y z + i_3^2 z^2\\ &= -x^2 + i_3 x y - i_2 x z - i_3 x y - y^2 + i_1 y z\\ &\quad + i_2 x z - i_1 y z - z^2\\ &= -x^2 - y^2 - z^2.\end{aligned}$$

$$TVq = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Mithin ist

$$(Tq)^2 = (Sq)^2 - (Vq)^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

und daher

$$Tq = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nun können wir auch einen Ausdruck für den Versor ableiten. Es ist

$$q = Tq \,.\, Uq,$$

mithin der Versor

$$Uq = \frac{q}{Tq} = \frac{w + i_1 x + i_2 y + i_3 z}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Aus dem so erlangten Werthe von Uq ergiebt sich schliesslich auch noch

$$SUq = w : \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

$$VUq = \frac{i_1 x + i_2 y + i_3 z}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

und endlich

$$TVUq = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

4. — Mit Benutzung der Normalform und mit Annahme des distributiven Principes lässt sich jetzt auch das associative Princip als bei der Multiplication von Quaternionen giltig nachweisen, d. h. zeigen, dass

$$q_1 q_2 q_3 = (q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3).$$

Setzen wir nämlich

$$q_1 = w_1 + i_1 x_1 + i_2 y_1 + i_3 z_1,$$
$$q_2 = w_2 + i_1 x_2 + i_2 y_2 + i_3 z_2,$$
$$q_3 = w_3 + i_1 x_3 + i_2 y_3 + i_3 z_3,$$

so ergiebt sich durch geeignete Multiplication der rechts stehenden Ausdrücke die Giltigkeit des associativen Principes. Wir erhalten nämlich, mit Berücksichtigung der für die Rechnung mit i_1, i_2 und i_3 giltigen Gesetze, dasselbe Resultat durch Multiplication des Productes der rechten Seiten der zwei ersten Gleichungen in die dritte, als durch Multiplication des Productes der beiden letzten rechten Seiten durch die erste.

5. — Zur Gleichheit zweier Quaternionen gehört die Gleichheit der vier Elemente, einzeln genommen, welche in der Normalform auftreten, d. h. damit $q_1 = q_2$, muss

$$w_1 = w_2, \quad x_1 = x_2 \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2$$

sein.

Zwei Vectoren α und β lassen sich jetzt ausdrücken durch

$$\alpha = i_1 x_1 + i_2 y_1 + i_3 z_1,$$
$$\beta = i_1 x_2 + i_2 y_2 + i_3 z_2,$$

worin x_1, y_1 und z_1, sowie x_2, y_2 und z_2 die Projectionen von α und β auf dasselbe rechtwinkelige Axensystem sind. Mit Hilfe dieser Werthe lässt sich nun auch

$$q = \beta : \alpha = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z$$

finden; und zwar ergeben sich die Elemente von q aus denen von α und β am leichtesten, wenn wir

$$\beta = q \,.\, \alpha$$

setzen und dann aus

$i_1 x_2 + i_2 y_2 + i_3 z_2 = (w + i_1 x + i_2 y + i_3 z)(i_1 x_1 + i_2 y_1 + i_3 z_1)$, nachdem wir rechts ausmultiplicirt haben, durch Gleichsetzung der Coefficienten an i_1, i_2 und i_3, sowie der Scalartheile, die Werthe von w, x, y und z ermitteln.

6. — Durch Multiplication von α in β erhalten wir

$$\alpha . \beta = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + i_1 (y_1 z_2 - y_2 z_1) + i_2 (z_1 x_2 - z_2 x_1) + i_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Dagegen ist

$$\beta . \alpha = -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) - i_1 (y_1 z_2 - y_2 z_1) - i_2 (z_1 x_2 - z_2 x_1) - i_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Wir finden also, wie schon in §. 50, 3,

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha,$$
$$V\alpha\beta = -V\beta\alpha.$$

Wird $\alpha = \beta$, so ist

$$\alpha^2 = -(x^2 + y^2 + z^2) = -(T\alpha)^2,$$

eine Resultat, zu dem wir ja auch schon in §. 49, 6 gelangt sind, und dessen geometrische Bedeutung die ist, dass eine Strecke durch Multiplication mit dem Quadrate eines zu ihr senkrechten Vectors um zwei Rechte gedreht, d. h. in die entgegengesetzte Richtung gebracht wird, und dass sie zugleich im Verhältniss von 1 zu a^2 gestreckt wird, wenn a die Längenzahl von α ist.

Ein Einheitsvector γ hat zum Quadrate -1. Und da

$$\gamma = i_1 \cos\varphi_1 + i_2 \cos\varphi_2 + i_3 \cos\varphi_3,$$

wo die φ die Winkel zwischen γ und den Axen sind, so ist also

$$\gamma^2 = (i_1 \cos\varphi_1 + i_2 \cos\varphi_2 + i_3 \cos\varphi_3)^2 = -\cos\varphi_1{}^2 - \cos\varphi_2{}^2 - \cos\varphi_3{}^2 = -1,$$

d. h. jeder Ausdruck

$$x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$$

hat mit $\sqrt{-1}$ die Eigenschaft gemein, dass sein Quadrat gleich der negativen Einheit, wenn

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 1$$

ist.

7. — Mit Hilfe der Sätze über die Zerlegung einer Quaternion in eine Summe lässt sich auch der Unterschied sichtbar machen, der in dem Product zweier Quaternionen durch Vertauschung der Factoren hervorgerufen wird. Es sei

$$q_1 = Sq_1 + Vq_1, \quad q_2 = Sq_2 + Vq_2,$$

so ist

$$q_1 q_2 = (Sq_1 + Vq_1)(Sq_2 + Vq_2) = Sq_1 Sq_2 + Sq_2 Vq_1 + Sq_1 Vq_2 + Vq_1 Vq_2,$$
$$q_2 q_1 = (Sq_2 + Vq_2)(Sq_1 + Vq_1) = Sq_1 Sq_2 + Sq_2 Vq_1 + Sq_1 Vq_2 + Vq_2 Vq_1.$$

In den rechten Seiten dieser Gleichungen sind nur die letzten Glieder von einander verschieden, indem im Allgemeinen $Vq_1\,Vq_2$ nicht identisch ist mit $Vq_2\,Vq_1$. Setzen wir nun

$$Vq_1 = x_1\,i_1 + y_1\,i_2 + z_1\,i_3,$$
$$Vq_2 = x_2\,i_1 + y_2\,i_2 + z_2\,i_3,$$

so ist

$$Vq_1\,Vq_2 = -(x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2) + (y_1\,z_2 - y_2\,z_1)\,i_1 + (z_1\,x_2 - z_2\,x_1)\,i_2 + (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)\,i_3,$$
$$Vq_2\,Vq_1 = -(x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2) - (y_1\,z_2 - y_2\,z_1)\,i_1 - (z_1\,x_2 - z_2\,x_1)\,i_2 - (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)\,i_3,$$

d. h. es ist

$$S\,(Vq_1\,Vq_2) = S\,(Vq_2\,Vq_1),$$
$$V\,(Vq_1\,Vq_2) = -V\,(Vq_2\,Vq_1),$$

und wir haben schliesslich

$$q_1\,q_2 = Sq_1\,Sq_2 + Sq_1\,Vq_2 + Sq_2\,Vq_1 + S\,(Vq_1\,Vq_2) + V\,(Vq_1\,Vq_2),$$
$$q_2\,q_1 = Sq_1\,Sq_2 + Sq_1\,Vq_2 + Sq_2\,Vq_1 + S\,(Vq_1\,Vq_2) - V\,(Vq_1\,Vq_2),$$

wodurch dann die Aenderung zu Tage tritt, die durch Vertauschung der Factoren in dem Producte zweier Quaternionen bewirkt wird.

Aus vorstehender Entwickelung ergiebt sich zugleich, dass

$$Sq_1\,q_2 = Sq_2\,q_1,$$

und

$$Vq_1\,q_2 + Vq_2\,q_1 = 2\,(Sq_1\,Vq_2 + Sq_2\,Vq_1).$$

8. — Eine andre Zerlegung der Quaternionen in eine viergliedrige Form ergiebt sich auf folgende Art. Es ist nach §. 44, 9

$$\varrho = \alpha\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \beta\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \gamma\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m} + \delta\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{m},$$

wenn ϱ, α, β, γ, δ die Vectoren $o\mathfrak{m}$, $o\mathfrak{a}$, $o\mathfrak{b}$, $o\mathfrak{c}$, $o\mathfrak{d}$, die rechts stehenden Raumfunctionen aber auf das Tetraeder $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ bezogen sind. Dann ist

$$\frac{\varrho}{\alpha} = \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \frac{\gamma}{\alpha}\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m} + \frac{\delta}{\alpha}\,\mathrm{Cos}_4\,\mathfrak{m},$$

oder mit einer leicht verständlichen Abänderung in den Indices der Cosinusse, und wenn wir zugleich die schiefen Quaternionen

$$\frac{\beta}{\alpha} = \mathfrak{j}_1,\quad \frac{\gamma}{\alpha} = \mathfrak{j}_2,\quad \frac{\delta}{\alpha} = \mathfrak{j}_3$$

setzen,

$$\frac{\varrho}{\alpha} = \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathfrak{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathfrak{j}_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \mathfrak{j}_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}.$$

Diess ist aber ein viergliedriger Ausdruck für die allgemeine Quaternion $\varrho : \alpha$, dieses Mal mit Hilfe der die Länge und Richtung von ϱ bestimmenden Raumfunctionen von $\mathfrak{m}$, und der Hilfsquaternionen $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$ und $\mathfrak{j}_3$, welche letztere durch die Lage des Divisors α zu den Axen β, γ und δ bestimmt sind.

Die vorstehende Form einer Quaternion reducirt sich in drei Fällen auf nur drei Glieder.

Liegt der Endpunkt $\mathfrak{m}$ von ϱ in einer der Seitenflächen des Grundtetraeders, so wird der entsprechende Raumcosinus zu Null. Nehmen wir z. B. an, $\mathfrak{m}$ fiele in die Ebene D, so ist $\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m} = 0$, und wir haben

$$\varrho : \alpha = \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m}.$$

Jetzt sind die Raumfunctionen identisch mit den planimetrischen Functionen von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$. Aehnliche Ausdrücke würden wir erhalten, wenn $\mathfrak{m}$ in B oder in C läge.

Fällt dagegen $\mathfrak{m}$ nach A, so ist

$$\varrho : \alpha = \mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m},$$

wobei die Raumcosinusse nun als Planfunctionen von $\mathfrak{m}$ in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ gelten können.

Nicht uninteressant ist endlich der Fall, dass $\mathfrak{o}$ mit einem der Eckpunkte zusammen fällt. Es sei diess mit $\mathfrak{d}$ z. B., so ist $\delta = 0$ und daher

$$\varrho : \alpha = \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m},$$

wo nun aber

$$\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} = 1 - \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m} = \mathrm{Sin}_3\,\mathfrak{m}$$

ist, und nicht wie oben gleich 1. Diese letzte dreigliedrige Form kann einigermassen die Lücke ausfüllen, die in §. 39, 1 in Bezug auf einen solchen dreigliedrigen complexen Ausdruck für eine Strecke von beliebiger Richtung angedeutet wurde.

Auf nur zwei Glieder lässt sich $\varrho : \alpha$ reduciren, wenn $\mathfrak{m}$ in einer Ebene liegt, die durch $\mathfrak{o}$ und eine Kante des Tetraeders $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ geht, und zwar wird $\varrho : \alpha$ jetzt von der Form

$$\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m},$$

oder

$$\mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m},$$

je nachdem die betreffende Kante des Tetraeders durch $\mathfrak{a}$ geht oder nicht.

Der Ausdruck

$$\varrho : \alpha = \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m}$$

lässt sich auch direct ableiten und demselben dann noch eine andre Form geben. Es ist in dem Dreiecke $\mathfrak{o}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{o}\,\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\,\mathfrak{a}\,\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathfrak{o}\,\mathfrak{b}\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m}$$

$$= \mathfrak{o}\,\mathfrak{a}\,\frac{\triangle_1}{\triangle} + \mathfrak{o}\,\mathfrak{b}\,\frac{\triangle_2}{\triangle},$$

wenn $\triangle_1$ gleich dem Dreiecke $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{b}$, $\triangle_2$ gleich $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}$ und $\triangle$ das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ selbst ist. Nun ist

$$\triangle_1 = {}^1/_2\,\mathrm{r}\,\mathfrak{b}\,\sin(\mathrm{r}\,\mathfrak{b}),$$
$$\triangle_2 = {}^1/_2\,\mathrm{r}\,\mathfrak{a}\,\sin(\mathrm{r}\,\mathfrak{a}),$$
$$\triangle = {}^1/_2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

wenn wir mit a, b und r die Tensoren von α, β und ϱ, also die Längen $\mathfrak{o}\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{o}\,\mathfrak{m}$ bezeichnen. Daher haben wir

$$\frac{\mathfrak{o}\mathfrak{m}}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}} = \frac{\varrho}{\alpha} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}} \frac{\sin(\mathfrak{r}\mathfrak{b})}{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{b}} \frac{\sin(\mathfrak{r}\mathfrak{a})}{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$
$$= \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}} \left(\frac{\sin(\mathfrak{r}\mathfrak{b})}{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} + \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \frac{\sin(\mathfrak{r}\mathfrak{a})}{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \right)$$
$$= \frac{\mathrm{T}\varrho}{\mathrm{T}\alpha} \left({}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\varphi + \frac{\mathrm{U}\beta}{\mathrm{U}\alpha} \cdot {}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi \right)$$
$$= \frac{\mathrm{T}\varrho}{\mathrm{T}\alpha} ({}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{j}\,{}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi),$$

worin φ und λ die Winkel $\alpha\varrho$ und $\alpha\beta$, ${}^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\varphi$ und ${}^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\varphi$ allgemeine Winkelfunctionen für die Basis λ bedeuten, und j der Versor für den Winkel λ, d. h. der früher (§. 12, 11) mit j_λ bezeichnete Werth ist, hier freilich mit Berücksichtigung der Ebene, in welcher α und β liegen.

Schliesslich wollen wir noch die geometrische Deutung der einzelnen Glieder in

$$\varrho : \alpha = \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}$$

suchen.

Ziehen wir im Grundtetraeder die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ bis zum Durchstich $\mathfrak{a}_1$ mit A der Gegenseite von $\mathfrak{a}$, so ist

$$\varrho = \mathfrak{o}\mathfrak{m} = \mathfrak{x}\alpha + \mathfrak{y}\alpha_1,$$

wenn α_1 der Vector $\mathfrak{o}\mathfrak{a}_1$ ist. Aus dem Dreiecke $\mathfrak{o}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ lässt sich aber leicht finden

$$\varrho = \alpha \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} + \alpha_1 \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}$$
$$= \alpha\,\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \alpha_1\,\mathrm{Sin}_0\,\mathfrak{m}.$$

Mithin ist

$$\varrho : \alpha = \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}\,\mathrm{Sin}_0\,\mathfrak{m},$$

worin j jetzt die schiefe Quaternion $\alpha_1 : \alpha$ darstellt. Zieht man von $\mathfrak{m}$ die Strecke $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_0$ parallel zu α_1 bis an $\mathfrak{m}_0$ auf $\mathfrak{o}\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{o}\mathfrak{m}_0 = \alpha\,\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m}$, während $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_0 = \alpha_1\,\mathrm{Sin}_0\,\mathfrak{m}$. Zerlegt man hierauf noch die auf $\mathfrak{o}\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{o}$ aus abgetragene Strecke $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_0$ nach den Richtungen von $\mathfrak{o}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{o}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{o}\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{o}\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{o}\mathfrak{m}_3$, so sind diese Vectoren bezüglich gleich $\beta\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m}$, $\gamma\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m}$, $\delta\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}$ (vergl. §. 41, 1), und es ist also

$$\varrho = \mathfrak{o}\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{o}\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{o}\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{o}\mathfrak{m}_3,$$
$$= \mathfrak{w} + \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3,$$

und daher

$$\varrho : \alpha = \frac{\mathfrak{w}}{\alpha} + \frac{\mathfrak{x}_1}{\alpha} + \frac{\mathfrak{x}_2}{\alpha} + \frac{\mathfrak{x}_3}{\alpha},$$

wodurch die einzelnen Glieder des viergliedrigen Ausdrucks in Vectorenquotienten aufgelöst sind.

Anstatt mit Zuziehung des Punktes $\mathfrak{a}_1$ in der Ebene $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ zuerst die Zerlegung von ϱ zu bewirken und dann den zweiten Vector nach β, γ

und δ zu zerlegen, hätte man auch ϱ unter einem bestimmten Winkel λ nach α zerlegen können und dann den zweiten Theil nach β, γ und δ.

In wie weit diese Formen der Quaternionen verwendbar oder entwicklungsfähig sind, müsste erst durch weitere Untersuchungen festgestellt werden. Eine für uns nicht unwichtige Anwendung lässt aber die obige viergliedrige Form der goniometrischen Quaternionen jedenfalls zu; es ist diess die Herleitung der Normalform der longimetrischen Quaternionen. Rückt nämlich o ins Unendliche, so werden $\mathfrak{om}$, $\mathfrak{oa}$, $\mathfrak{ob}$, $\mathfrak{oc}$ und $\mathfrak{ob}$ an der Grenze einander parallel und auch einander gleich; wir haben dann

$$\varrho_{\mathfrak{m}} = \alpha\,(\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}).$$

Da jetzt $\mathrm{T}\,\varrho_{\mathfrak{m}} = \mathrm{T}\,\alpha$, so dürfen wir

$$\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{m} + \mathrm{j}_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{m}$$

als einen Factor bezeichnen, der bewirkt, dass eine Strecke α (von beliebiger Länge und Richtung) von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{m}$ in parallele Lage geschoben wird. Die Quaternionen j_1, j_2 und j_3 aber lassen sich leicht als Verschiebungsfactoren von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ nachweisen (vergl. §. 34, 2), wenn man nur $\mathfrak{m}$ der Reihe nach mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ zusammen fallen lässt.

Wir verfolgen diese Betrachtung hier nicht weiter, da den longimetrischen Quaternionen der letzte Abschnitt gewidmet ist, wo dann auch nachgewiesen werden wird, dass wir den Grenzwerthen j_1, j_2 und j_3 die geometrische Bedeutung beilegen können von Quotialvectoren, die mit $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{ad}$ identisch sind.

§. 52. Verwandte Quaternionen.

1. — In einem nahen Zusammenhang mit der Quaternion $\mathrm{q} = \beta : \alpha$ stehen drei andre Vectorenquotienten, die wir als die reciproke (q^{-1}), die conjugirte (Kq) und die entgegengesetzte (—q) Quaternion von q bezeichnen werden und im Folgenden kurz erörtern wollen.

Unter der reciproken Quaternion von q verstehen wir eine Quaternion, die mit q multiplicirt zum Product 1 ergiebt. Ist nun $\mathrm{q} = \beta : \alpha$, so ist die reciproke Quaternion $\mathrm{q}^{-1} = \frac{\alpha}{\beta}$. Denn

$$\mathrm{q} \,.\, \mathrm{q}^{-1} = \frac{\beta}{\alpha} \,.\, \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Da nun q^{-1} durch Multiplication in β dieses zu α macht, eine darauf folgende Multiplication mit q aber wieder β erzeugt, so müssen q und q^{-1} einander in ihren Wirkungen aufheben. Es muss also Tq^{-1} der reciproke Werth von Tq sein, und es muss Uq^{-1} zwar dieselbe Winkel-

grösse und -Ebene wie Uq ausdrücken, es muss aber der Sinn der Drehung für Uq und Uq^{-1} ein entgegengesetzter sein. Wir haben daher

$$Tq^{-1} = \frac{1}{Tq} = (Tq)^{-1},$$

$$Uq^{-1} = \frac{1}{Uq} = (Uq)^{-1}.$$

Und wenn

$$Uq = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

so ist

$$Uq^{-1} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

daher

$$q^{-1} = (Tq)^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Dass das Product $q \,.\, q^{-1}$ commutativ ist, ergiebt sich leicht entweder aus

$$\frac{\beta}{\alpha} \,.\, \frac{\alpha}{\beta} = 1 = \frac{\alpha}{\beta} \,.\, \frac{\beta}{\alpha},$$

oder aus der Bedeutung von q und q^{-1}, oder endlich daraus, dass diese Quaternionen complanar sind.

Der reciproke Werth eines Vectors α lässt sich jetzt auch angeben, da α als Vertreter einer Elementaren gelten kann. Ist zuerst α ein Einheitsvector, so ist der reciproke Werth $-\alpha$; denn

$$\alpha \,.\, (-\alpha) = \alpha \,.\, (-1) \,.\, \alpha = -\alpha \,.\, \alpha = -\alpha^2 = +1.$$

Ist dagegen α kein Einheitsvector, so ist

$$\alpha \,.\, \alpha^{-1} = T\alpha \; U\alpha \,.\, (T\alpha)^{-1} \, (U\alpha)^{-1} = U\alpha \, (U\alpha)^{-1} = 1,$$

woraus $U\alpha^{-1} = -U\alpha$ folgt. Es ist also der reciproke Werth eines Vectors ein Vector mit entgegengesetzter Richtung und mit einem Tensor, der gleich dem reciproken Werth des ursprünglichen Tensors ist, d. h.

$$\alpha^{-1} = -(T\alpha)^{-1} \,.\, U\alpha.$$

2. — Die conjugirte Quaternion Kq weicht von q nur in Bezug auf den Sinn der Drehung des Winkels ab; alle übrigen Stücke sind für q und Kq dieselben. Conjugirte Quaternionen haben also dieselbe Ebene, denselben Tensor und gleiche aber entgegengesetzt gedrehte Winkel. Sind z. B. die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks mit β_1 und β_2 bezeichnet, während μ die Höhe darstellt, so sind $\mu : \beta_1$ und $\mu : \beta_2$ conjugirte Quaternionen, oder in Zeichen

$$\frac{\mu}{\beta_1} = K\,\frac{\mu}{\beta_2}.$$

Aus der Definition folgt dann aber auch, dass

$$\frac{\mu}{\beta_2} = K\,\frac{\mu}{\beta_1},$$

oder dass

$$K\,Kq = q.$$

Ferner ist

$$Tq = TKq;$$

dagegen erzeugen Uq und UKq Drehungen von derselben Grösse aber in entgegengesetzter Richtung, so dass

$$Uq \,.\, UKq = 1.$$

Es ist daher UKq und Uq^{-1} identisch, und wir finden

$$UKq = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

so dass endlich

$$Kq = Tq \,.\, (\cos\varphi - i\sin\varphi) = Sq - Vq,$$

dass mithin

$$SKq = Sq \quad \text{und} \quad VKq = -Vq \quad \text{ist.}$$

Aus dem obigen Ausdrucke für Kq, wie auch aus einer leicht zu construirenden Figur, ergeben sich die beiden Gleichungen

$$q + Kq = 2Sq,$$
$$q - Kq = 2Vq.$$

Eine wichtige Beziehung zwischen q und Kq ergiebt sich durch Multiplication dieser beiden Quaternionen mit einander. Es ist

$$qKq = Tq\,Uq \,.\, TKq\,UKq$$
$$= (Tq)^2 \,.\, Uq \,.\, UKq = (Tq)^2.$$

Ist

$$q = w + i_1 x + i_2 y + i_3 z,$$

so ist

$$Kq = w - (i_1 x + i_2 y + i_3 z),$$

und

$$qKq = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (Tq)^2.$$

Dass q und Kq in dem Producte qKq commutative Factoren sind, ergiebt sich aus ihrer Bedeutung, sowie auch aus ihrer Eigenschaft als complanare Quaternionen.

Da der Scalartheil einer rechten Quaternion oder einer Elementaren v gleich Null ist, so haben wir

$$v = Sv + Vv = Vv,$$

daher

$$Kv = Sv - Vv = -Vv = -v,$$

d. h. die Conjugirte zu einer Elementaren ist die negative Elementare. Nun kann aber jeder Vector als Elementare betrachtet werden, es ist daher

$$K\alpha = -\alpha,$$

d. h. der conjugirte Vector eines Vectors ist der negative Vector.

Aus $qKq = (Tq)^2$ folgt daher

$$\alpha K\alpha = \alpha(-\alpha) = -\alpha^2 = (T\alpha)^2.$$

Betrachtet man einen Scalar als die Grenze, der sich eine Quaternion bei abnehmendem Winkel nähert, so ergiebt sich aus

$$Kq = Sq - Vq,$$

dass der conjugirte Werth eines Scalars dieser Scalar selbst ist.

Wir schliessen die Betrachtung der wichtigen conjugirten Quaternionen mit dem Nachweise eines Satzes über die Conjugirte des Productes zweier Quaternionen, der vielfach Verwendung findet. Es ist

$$K(q_1 q_2) = Kq_2 \,.\, Kq_1,$$

wobei der Wechsel in der Folge der Quaternionen zu beachten ist.

Die Richtigkeit ergiebt sich leicht mit Hilfe von Fig. 20, Seite 158. Dort haben wir nachgewiesen, dass

$$q_2 q_1 = oc : oa,$$
$$q_1 q_2 = oa_1 : oc_1.$$

Stellen wir nun einmal einen Versor durch den Hauptbogen dar, den seine Schenkel auf einer um den Scheitel beschriebenen Einheitskugelfläche bestimmen, diesen Bogen nach Grösse und Richtung betrachtet, so lassen obige zwei Gleichungen sich auch wiedergeben durch

$$bc \,.\, ab = ac, \quad ba_1 \,.\, c_1 b = c_1 a_1,$$

oder in Worten: im sphärischen Dreieck ist das Product zweier Seiten gleich der dritten Seite. Mit Anwendung dieses Satzes folgt aber sofort

$$bc_1 \,.\, a_1 b = a_1 c_1.$$

Stellt aber ein Bogen ab die Quaternion q dar, so ist Kq dargestellt durch ba. Die letzte Gleichung lässt sich daher übersetzen in

$$Kq_2 \,.\, Kq_1 = K(q_1 q_2)$$

oder

$$K(q_1 q_2) = Kq_2 \,.\, Kq_1,$$

w. z. b. w.

Wenn der vorstehende Nachweis auch nur für Versoren geführt ist, so bietet der Uebergang zu Quaternionen keine Schwierigkeit, da diese sich von den Versoren bloss durch Tensoren unterscheiden, welche commutative Factoren sind. Der Wichtigkeit des Satzes halber geben wir jedoch einen zweiten Beweis ohne Zuziehung einer Figur. Es ist

$$q_2 q_1 = Tq_1 \, Tq_2 \,.\, Uq_2 \,.\, Uq_1.$$

Ist nun für Einheitsvectoren

$$Uq_1 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad Uq_2 = \frac{\gamma}{\beta},$$

so ist

$$q_2 q_1 = Tq_1 \, Tq_2 \frac{\gamma}{\beta} \,.\, \frac{\beta}{\alpha} = Tq_1 \, Tq_2 \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ist aber $Uq_1 = \frac{\beta}{\alpha}$, so ist $UKq_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, und es ist $UKq_2 = \frac{\beta}{\gamma}$; daher haben wir

$$Kq_1 \,.\, Kq_2 = Tq_1 \, Tq_2 \,.\, \frac{\alpha}{\beta} \,.\, \frac{\beta}{\gamma} = Tq_1 \, Tq_2 \,.\, \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Es ist aber $\frac{\alpha}{\gamma} = K\frac{\gamma}{\alpha} = KU(q_2 q_1)$, daher

$$Kq_1 \,.\, Kq_2 = Tq_1 \, Tq_2 \,.\, KU(q_2 q_1) = K(q_2 q_1).$$

3. — Nennt man entgegengesetzte oder negative Quaternion von q diejenige, welche einen Vector α durch Multiplication nicht in β sondern in $-\beta$ umwandelt, so ist, wenn wir die neue Quaternion einmal q_1 nennen,

$$q\alpha + q_1\alpha = \beta - \beta = 0,$$

also

$$q + q_1 = 0 \quad \text{oder} \quad q_1 = -q.$$

Da nun $q_1 = Tq_1 \,.\, Uq_1$, und da Tq_1 als eine absolute Zahl betrachtet wird, so ist $Uq_1 = -Uq$. Ist

$$q = Tq \,.\, (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so ist

$$\begin{aligned} q_1 &= Tq \,.\, (-\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ &= Tq \,.\, [\cos(\varphi - \pi) + i\sin(\varphi - \pi)], \end{aligned}$$

d. h. die entgegengesetzte Quaternion von q hat denselben Tensor und dieselbe Ebene wie q, ihr Winkel ist dagegen das Supplement von φ und ist im entgegengesetzten Sinne gedreht.

Die verwandten Functionen lassen sich also darstellen durch

$$\begin{aligned} q &= Tq \,.\, (\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ Kq &= Tq \,.\, (\cos\varphi - i\sin\varphi) = Tq \,.\, [\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)], \\ Rq &= q^{-1} = (Tq)^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi), \\ -q &= Tq \,.\, (-\cos\varphi - i\sin\varphi) = Tq \,.\, [\cos(\varphi - \pi) + i\sin(\varphi - \pi)]. \end{aligned}$$

Als $K(-q)$ können wir schliesslich noch hinzufügen

$$K(-q) = Tq \,.\, (-\cos\varphi + i\sin\varphi) = Tq \,.\, [\cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)].$$

In allen diesen Ausdrücken stellt i einen Einheitsvector senkrecht zur Ebene der Quaternion dar und deutet eben an, dass die verwandten Quaternionen complanar sind.

4. — Die von uns bisher betrachteten Operationen in Bezug auf Quaternionen, welche wir durch die Zeichen

$$S,\ V,\ K,\ T,\ U,\ I$$

bezeichnet haben, zerfallen in zwei Gruppen. Die drei ersten sind distributive Operationen, die drei letzteren sind es nicht, d. h. es ist

$$\begin{aligned} S(q_1 + q_2) &= Sq_1 + Sq_2, \\ V(q_1 + q_2) &= Vq_1 + Vq_2, \\ K(q_1 + q_2) &= Kq_1 + Kq_2. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit der beiden ersten dieser Formeln ergiebt sich leicht mit Benutzung des bekannten Satzes, dass die Projection der geometrischen Summe zweier Vectoren gleich der Summe der Projectionen dieser Vectoren ist. Die letzte Formel dagegen lässt sich ohne Schwierigkeit durch einfache geometrische Betrachtungen begründen.

5. — Beweis des distributiven Princips für Quaternionen. Wir geben hier (nach Tait) nachträglich einen Beweis für die Giltigkeit des distributiven Principes bei der Multiplication von Quaternionen. Erforderlich zu seinem Verständniss ist nur Kenntniss des Begriffes der Quaternion,

ihrer Zerlegbarkeit in einen Scalar- und einen Vectortheil, der Begriff der conjugirten Quaternion, des Satzes

$$\mathrm{K}(q_1 q_2) = \mathrm{K}q_2 \,.\, \mathrm{K}q_1,$$

und endlich die Bedeutung des reciproken Werthes eines Vectors α als eines Vectors von entgegengesetzter Richtung mit dem Tensor $(\mathrm{T}\alpha)^{-1}$. Alle diese Begriffe und Sätze bedürfen zu ihrer Erklärung und Herleitung das distributive Princip nicht, wir machen also keinen Zirkelschluss, indem wir den Beweis erst hier geben, obgleich wir das Princip selbst nach seiner Annahme in (§. 47, 6) schon mehrfach verwendet haben.

Voraussetzen müssen wir, dass wie in der allgemeinen Arithmetik

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$$

sei, oder dass

$$\beta\alpha^{-1} + \gamma\alpha^{-1} = (\beta+\gamma)\alpha^{-1},$$

ein Satz, den wir schon bei der Addition zweier Quaternionen verwendeten. Da α^{-1} selbst ein Vector ist, den wir δ nennen wollen, so ist

$$(\beta+\gamma)\delta = \beta\delta + \gamma\delta.$$

Nehmen wir von beiden Seiten dieser Gleichung die Conjugirten, so ist

$$\mathrm{K}(\beta+\gamma)\delta = \mathrm{K}\beta\delta + \mathrm{K}\gamma\delta,$$

und mit Anwendung des oben erwähnten Satzes über die Conjugirte eines Productes

$$\mathrm{K}\delta \,.\, \mathrm{K}(\beta+\gamma) = \mathrm{K}\delta \,.\, \mathrm{K}\beta + \mathrm{K}\delta \,.\, \mathrm{K}\gamma,$$

oder

$$\delta'(\beta'+\gamma') = \delta'\beta' + \delta'\gamma',$$

wenn wir die conjugirten Vectoren mit Accenten bezeichnen. Ersetzen wir jetzt δ' durch $\beta+\gamma$, so ist

$$(\beta+\gamma)(\beta'+\gamma') = (\beta+\gamma)\beta' + (\beta+\gamma)\gamma',$$

welches nach dem weiter oben stehenden Satze gleich

$$\beta\beta' + \gamma\beta' + \beta\gamma' + \gamma\gamma'$$

ist. Das distributive Princip ist also giltig bei der Multiplication von Vectoren.

Wir müssen es nun noch für Quaternionen beweisen und zeigen zuerst, dass $(\mathrm{a}+\alpha)\mathrm{q} = \mathrm{a}\mathrm{q} + \alpha\mathrm{q}$,

wobei a ein beliebiger Scalar, α ein beliebiger Vector und q eine Quaternion ist. Denken wir uns zu diesem Zwecke α als den Vector einer Elementaren $\frac{\gamma}{\beta}$, deren Divisor β in der Schnittlinie ihrer Ebene mit der Ebene von q liegt, so kann

$$\mathrm{q} = \frac{\beta}{\delta}$$

gesetzt werden. Indem wir ferner

$$a = \frac{\alpha\beta}{\beta}$$

setzen, erhalten wir

$$(a + \alpha)\,q = \frac{a\beta + \gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\delta} = \frac{a\beta + \gamma}{\delta},$$
$$= a\,\frac{\beta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} = a\,\frac{\beta}{\delta} + \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\delta}$$
$$= aq + \alpha q.$$

Daher ist auch

$$K(a + \alpha)\,q = K(aq + \alpha q),$$

d. h.
$$Kq \,.\, K(a + \alpha) = Kq \,.\, Ka + Kq \,.\, K\alpha,$$

oder
$$q'(a' + \alpha') = q'a' + q'\alpha',$$

wenn wir wieder die Conjugirten mit Accenten bezeichnen. Da diese Conjugirten selbst wieder Vectoren und Quaternionen sind, so können wir auch setzen, mit Weglassung der Accente,

$$q(a + \alpha) = qa + q\alpha.$$

Drücken wir nun q als eine Summe aus einem Scalar und einem Vector, also etwa durch $b + \beta$ aus, so haben wir

$$(b + \beta)\,(a + \alpha) = (b + \beta)\,a + (b + \beta)\,\alpha$$
$$= ba + \beta a + b\alpha + \beta\alpha.$$

Zerlegen wir ferner a und b in die Summe zweier Scalaren, α und β in die Summe zweier Vectoren, so ist

$$(b_1 + b_2 + \beta_1 + \beta_2)\,(a_1 + a_2 + \alpha_1 + \alpha_2) = (b_1 + b_2)\,(a_1 + a_2)$$
$$+ (\beta_1 + \beta_2)\,(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,(\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$+ (\beta_1 + \beta_2)\,(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Jetzt ist auf alle Factoren der rechten Seite das distributive Princip anwendbar; die dadurch erhaltene Summe von Producten lässt sich aber folgendermassen ordnen und zusammen ziehen

$$(a_1 + \alpha_1)\,(b_1 + \beta_1) + (a_1 + \alpha_1)\,(b_2 + \beta_2) + (a_2 + \alpha_2)\,(b_1 + \beta_1)$$
$$+ (a_2 + \alpha_2)\,(b_2 + \beta_2).$$

Setzen wir hierin schliesslich

$$a_1 + \alpha_1 = p, \quad a_2 + \alpha_2 = q,$$
$$b_1 + \beta_1 = r, \quad b_2 + \beta_2 = s,$$

so ist

$$(p + q)\,(r + s) = pr + ps + qr + qs,$$

wobei nun p, q, r und s als aus Scalar und Vector bestehend ganz allgemein Quaternionen darstellen, so dass also damit die Giltigkeit des distributiven Principes auch für Quaternionen bewiesen ist.

Das distributive Princip gestattet die Entwickelung von Ausdrücken der Form $(\alpha + \beta)^n$, wo n eine ganze positive Zahl ist. So haben wir z. B.

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm \alpha\beta \pm \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 \pm 2\,S\alpha\beta + \beta^2.$$

§. 53. Die vier Grundrechnungen mit Vectoren.

1. — Erscheint ein Vector ursprünglich nur als ein Ausdruck für die Lagenbeziehung seiner Endpunkte, so tritt doch bei der Verbindung dieser Strecken durch Rechnungen der ersten und zweiten Stufe sofort ihr Wesen als eine Art Operatoren zu Tage, wodurch entweder Punkte verschoben werden, oder Strecken eine Drehung erleiden. Da hierbei die Länge und die Richtung des Vectors in verschiedener Art mitwirken, so ist es nöthig, eine Zerlegung vorzunehmen, indem man

$$\alpha = \mathrm{T}\alpha \,.\, \mathrm{U}\alpha$$

setzt, worin der erste Factor nur auf die Länge, der zweite nur auf die Richtung sich bezieht. Dabei lässt sich $\mathrm{T}\alpha$ als eine positive Zahl, $\mathrm{U}\alpha$ als ein Einheitsvector in der Richtung von α auffassen.

Bei der Verbindung von Vectoren durch Addition und Subtraction gelangt man zu neuen Vectoren, und zwar erfolgen diese Operationen nach den Gesetzen, die der Zusammensetzung von Kräften von verschiedener Richtung in der Mechanik zu Grunde liegen, wenn diese Kräfte in einem Punkte angreifen.

Zerlegt man die Vectoren nach drei zu einander senkrechten Axen, und ist

$$\alpha = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$
$$\beta = b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3,$$

so ist

$$\alpha \pm \beta = (a_1 \pm b_1) i_1 + (a_2 \pm b_2) i_2 + (a_3 \pm b_3) i_3,$$

wo aus dem rechts stehenden Ausdrucke sich leicht Grösse und Richtung des resultirenden Vectors ergeben.

2. — Die Multiplication und Division zweier Vectoren führt nur dann wieder zu einem einfachen Vector, wenn die Glieder der Producte und der Quotienten senkrecht zu einander sind; im anderen Falle ergeben sich Quaternionen, die man im Allgemeinen nur noch als Potenzen von Vectoren darstellen kann. Wir finden

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha} \,.\, (\cos\alpha\beta + \mathrm{i}\sin\alpha\beta) = \mathrm{j}^{\frac{2\varphi}{\pi}},$$

wobei i ein zur Ebene $\alpha\beta$ senkrechter Einheitsvector, j dagegen ein Vector senkrecht zu $\alpha\beta$, aber von einer solchen Länge, dass

$$(\mathrm{Tj})^{\frac{2\varphi}{\pi}} = \frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha},$$

wenn φ gleich dem Winkel $\alpha\beta$ ist. Es ist ferner

$$\alpha\beta = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta \,.\, (-\cos\alpha\beta + \mathrm{i}\sin\alpha\beta),$$
$$\beta\alpha = \mathrm{T}\alpha\,\mathrm{T}\beta \,.\, (-\cos\alpha\beta - \mathrm{i}\sin\alpha\beta),$$

so dass wir haben

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha; \quad V\alpha\beta = -V\beta\alpha;$$
$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta; \quad \alpha\beta - \beta\alpha = 2V\alpha\beta.$$

Als andre, früher nachgewiesene Resultate der Rechnung mit Vectoren führen wir noch an

$$\alpha^{-1} = 1 : \alpha = -U\alpha\,(T\alpha)^{-1},$$
$$K\alpha = -\alpha; \quad \alpha K\alpha = (T\alpha)^2.$$
$$\alpha^2 = -(T\alpha)^2; \quad (U\alpha)^2 = -1,$$
$$K\alpha\beta = \beta\alpha.$$

3. — Als geometrische Deutung der Multiplication eines Vectors durch einen zu ihm senkrechten Vector ergiebt sich die Drehung des Multiplicanden um einen rechten Winkel in der zum Multiplicator senkrechten Ebene, und zugleich eine Streckung des Multiplicanden nach Angabe des Tensors des Multiplicators. Ebenso bedeutet die Division eines Vectors durch einen zu ihm senkrecht gerichteten, eine Drehung des Dividend-Vectors um den Divisor als Axe; diese Drehung beträgt ebenfalls einen rechten Winkel, erfolgt aber im negativen Sinne. Der Tensor des Quotienten ist der Quotient aus den Tensoren des Dividend und Divisors.

Eine wiederholte Multiplication eines Vectors durch einen zu ihm senkrechten Vector führt den Multiplicand durch mehrere rechte Winkel, und hierdurch wurde man veranlasst allgemein festzustellen, dass eine Potenz eines Vectors mit beliebigem Exponenten ein Dreh- und Streckungsoperator ist, der einen dazu senkrechten Vector durch Multiplication um dasjenige Multiplum oder Submultiplum eines rechten Winkels dreht, welches der Exponent angiebt. Die Streckung des Multiplicandvectors erfolgt dagegen nach Angabe der Zahl, die man erhält durch Potenziren des Tensors des Multiplicators mit seinem Exponenten.

4. — Die einfachen Resultate der Rechnung zweiter Stufe mit Vectoren haben wir als Ergebnisse der Rechnung mit Quaternionen erlangt.

Man kann aber auch einige dieser Resultate in Form von Definitionen an die Spitze der Lehre von den Quaternionen stellen und dann die übrigen Lehren der Quaternionentheorie daraus ableiten, wie diess, wenn wir nicht irren, von Hamilton selbst angedeutet wurde, und von Kelland in seiner Introduction to Quaternions wirklich geschehen ist. Sind z. B. i, j, k drei zu einander senkrechte Einheitsvectoren, und nehmen wir an, dass das Produkt eines solchen Vectors in einen zu ihm senkrechten Vector gleich dem Resultate der Drehung um 90 Grad des Multiplicanden um den Multiplicator als Axe ist, so folgt hieraus sofort

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$
$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$
$$iij = ik = -j, \quad \text{mithin } i^2 = -1;$$
$$jjk = ji = -k, \quad \text{also } j^2 = -1;$$
$$kki = kj = -i, \quad \text{also } k^2 = -1.$$

Es ist ferner, unter Voraussetzung der Zerlegbarkeit der Vectoren, sowie des distributiven und des associativen Principes,

$$\alpha = \beta \cos\varphi + \gamma \sin\varphi,$$

wenn α, β und γ Einheitsvectoren derselben Ebene sind, β senkrecht zu γ und φ der Winkel $\alpha\beta$ ist. (Vergl. §. 50, 2).

Daher ist

$$\alpha\beta = \beta^2 \cos\varphi + \gamma\beta \sin\varphi = -\cos\varphi + i \sin\varphi,$$

wenn i ein zu $\alpha\beta$ senkrechter Einheitsvector ist. Ferner ist

$$\beta\alpha = \beta^2 \cos\varphi + \beta\gamma \sin\varphi = -\cos\varphi - i \sin\varphi.$$

Endlich ist

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha\beta = \beta\beta = -1,$$

oder

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot (-\cos\varphi + i \sin\varphi) = -1,$$

$$\frac{\beta}{\alpha}(-\cos\varphi + i\sin\varphi)\ (\cos\varphi + i\sin\varphi) = -(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

oder endlich

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Damit sind die Grundlagen der Quaternionenrechnung gewonnen. Wenn wir nun früher diesen einfachen Weg nicht einschlugen, so geschah diess desshalb, weil die in dem vorliegenden Werke verfolgte und im Wesentlichen auch von Hamilton und Tait eingehaltene Darstellungsweise der historischen Entwicklung dieser Lehren nahe kommt, und, wie uns scheint, mehr Einsicht in das Wesen der Quaternionen gewährt, als das kürzere Verfahren Kelland's.

5. — Sätze über Vectorenproducte mit drei Factoren.

(I.) Es ist $S\alpha\beta\gamma = S\gamma\alpha\beta = S\beta\gamma\alpha$
$= -S\alpha\gamma\beta = -S\beta\alpha\gamma = -S\gamma\beta\alpha,$

d. h. das Product dreier Vectoren ändert seinen Scalartheil nur, wenn eine Aenderung in der cyklischen Ordnung der Factoren eintritt.

Es ist nämlich

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha\,(S\beta\gamma + V\beta\gamma) = S\alpha\, V\beta\gamma,$$

weil $\alpha S\beta\gamma$ ein Vector ist, sein Scalar daher gleich Null. Nun ist

$$V\beta\gamma = -V\gamma\beta,$$

daher

$$S\alpha\beta\gamma = -S\alpha V\gamma\beta = -S\alpha S\gamma\beta - S\alpha V\gamma\beta = -S\alpha\gamma\beta.$$

Da auf ähnliche Weise sich ergiebt

$$S\alpha\gamma\beta = -S\gamma\alpha\beta,$$

so folgt hieraus, dass

$$S\alpha\beta\gamma = -S\alpha\gamma\beta = +S\gamma\alpha\beta \quad \text{etc.}$$

Von dem vorstehend zweimal benutzten Ausdruck $S.\alpha S\beta\gamma = 0$ macht man vielfach Gebrauch bei Transformationen von Quaternionen.

(II.) Dass auch in dem Producte von Quaternionen $q_1 q_2 q_3$ die cyklische Aenderung der Factorenfolge keine Aenderung im Scalartheile hervorruft, folgt leicht daraus, dass wenn wir $q_1 q_2 = p$ setzen

$$S q_1 q_2 q_3 = S p q_3 = S q_3 p$$

nach §. 51, 7. Daher ist

$$S q_1 q_2 q_3 = S q_3 q_1 q_2 = S q_2 q_3 q_1.$$

(III.) Drücken wir α, β und γ aus durch

$$x_1 i_1 + y_1 i_2 + z_1 i_3, \quad x_2 i_1 + y_2 i_3 + z_3 i_3, \quad x_3 i_1 + y_3 i_2 + z_3 i_3,$$

so ist

$$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix},$$

wie sich daraus ergiebt, dass die Scalartheile des Productes $\alpha\beta\gamma$ nur solche sind, worin i_1, i_2 und i_3 zugleich als Factoren auftreten, und dass diese Producte die Vorzeichen haben, wie sie vorstehende Determinante verlangt.

Da die rechts stehende Determinante der letzten Gleichung gleich dem negativen sechsfachen Volumen des Tetraeders ist, dessen eine Ecke im Coordinatenanfang ist, dessen drei andre dagegen α, β und γ zu Vectoren haben, so ist also

$$-\tfrac{1}{6} S\alpha\beta\gamma = \mathrm{Vol}\, o\, a\, b\, c,$$

wofür wir übrigens später einen directen Beweis geben werden.

Zugleich sieht man aus der Determinantenform von $S\alpha\beta\gamma$ aufs Neue die Eigenschaft des Zeichenwechsels dieses Scalars bei nichtcyklischer Vertauschung der Factoren. Eine wichtige Folgerung ergiebt sich aus der geometrischen Bedeutung von $S\alpha\beta\gamma$. Liegen nämlich α, β und γ in einer Ebene, so ist das Volumen des Tetraeders, welches α, β und γ zu Kanten hat, gleich Null. Daher ist in $S\alpha\beta\gamma = 0$ ein wichtiges Kennzeichen für die Complanarität der drei Vectoren α, β und γ gefunden.

(IV.) Eine so einfache Beziehung wie unter den Scalartheilen der Producte dreier Vectoren existirt nicht unter deren Vectortheilen. Wir haben hierfür nur die beiden Sätze

$$V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha,$$

und

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta.$$

Man sieht z. B. mit Hilfe des letzten Satzes, dass

$$\nabla\alpha\gamma\beta = \alpha S\beta\gamma + \beta S\gamma\alpha - \gamma S\alpha\beta,$$

dass mithin für diese beiden Vectoren des permutirten Productes keine einfache Relation existirt.

Da die erste der obigen Gleichungen nur eine Folge der zweiten ist, so brauchen wir nur diese letztere zu beweisen. Nach dem Satze

$$2\nabla\alpha\beta = \alpha\beta - \beta\alpha$$

haben wir nun

$$2\nabla(\alpha\nabla\beta\gamma) = \alpha\nabla\beta\gamma - (\nabla\beta\gamma)\alpha.$$

Ferner ist

$$0 = \alpha S\beta\gamma - (S\beta\gamma)\alpha,$$

da ein Scalar mit einem Vector commutativ ist. Daher finden wir durch Addition der zwei letzten Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\nabla(\alpha\nabla\beta\gamma) &= \alpha(\nabla\beta\gamma + S\beta\gamma) - (\nabla\beta\gamma + S\beta\gamma)\alpha, \\ &= \alpha\beta\gamma - \beta\gamma\alpha, \\ &= \alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma - \beta\alpha\gamma - \beta\gamma\alpha, \\ &= (\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma - \beta(\gamma\alpha + \alpha\gamma), \\ &= 2(S\alpha\beta)\gamma - 2\beta S\gamma\alpha. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\nabla[\alpha\nabla(\beta\gamma)] = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma.$$

Addirt man hierzu die leicht verständliche Gleichung

$$\nabla\alpha . S(\beta\gamma) = \alpha S(\beta\gamma),$$

so finden wir in der That

$$\nabla\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta.$$

(V.) Nicht uninteressant ist auch das Resultat, welches wir erhalten durch Addition der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha\nabla\beta\gamma) &= \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma, \\ \nabla(\beta\nabla\gamma\alpha) &= \alpha S\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta, \\ \nabla(\gamma\nabla\alpha\beta) &= \beta S\alpha\gamma - \alpha S\beta\gamma, \end{aligned}$$

nämlich

$$\nabla(\alpha\nabla\beta\gamma + \beta\nabla\gamma\alpha + \gamma\nabla\alpha\beta) = 0.$$

(VI.) Ersetzt man in Gleichung $\nabla\alpha\nabla\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma$ den Vector α durch $\nabla\alpha\beta$, so ist

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla\alpha\beta . \nabla\beta\gamma) &= \gamma . S(\nabla\alpha\beta)\beta - \beta S(\nabla\alpha\beta)\gamma \\ &= \gamma . S(\alpha\beta^2) - \beta S(\alpha\beta\gamma) \\ &= -\beta S(\alpha\beta\gamma), \end{aligned}$$

weil $S(\alpha\beta^2) = \beta^2 S\alpha = 0$ ist.

(VII.) Es ist auch

$$3S(\alpha\beta\gamma) = \alpha\nabla\beta\gamma + \beta\nabla\gamma\alpha + \gamma\nabla\alpha\beta.$$

Diess ergiebt sich durch Addition der drei gleichwerthigen Ausdrücke

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma &= S(\alpha\nabla\beta\gamma), \\ S\beta\gamma\alpha &= S(\beta\nabla\gamma\alpha), \\ S\gamma\alpha\beta &= S(\gamma\nabla\alpha\beta), \end{aligned}$$

venn man noch zur rechten Seite der erhaltenen Summe den Ausdruck

$$0 = \mathrm{V}(\alpha\mathrm{V}\beta\gamma + \beta\mathrm{V}\gamma\alpha + \gamma\mathrm{V}\alpha\beta)$$

ddirt.

6. — Sätze über vier Vectoren.

(I.) Da $\mathrm{K}\alpha = -\alpha$, so ist

$$\mathrm{K}(\alpha\beta) = \mathrm{K}\beta.\mathrm{K}\alpha = (-\beta)(-\alpha) = \beta\alpha,$$
$$\mathrm{K}(\alpha\beta\gamma) = \mathrm{K}\gamma.\mathrm{K}\alpha\beta = \mathrm{K}\gamma.\mathrm{K}\beta.\mathrm{K}\alpha = -\gamma\beta\alpha,$$
$$\mathrm{K}(\alpha\beta\gamma\delta) = \mathrm{K}\gamma\delta.\mathrm{K}\alpha\beta = \delta\gamma\beta\alpha.$$

Daraus folgt ferner, da allgemein

$$\mathrm{q} + \mathrm{K}\mathrm{q} = 2\mathrm{S}\mathrm{q},$$
$$\mathrm{q} - \mathrm{K}\mathrm{q} = 2\mathrm{V}\mathrm{q};$$
$$2\mathrm{S}\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\alpha; \quad 2\mathrm{V}\alpha\beta = \alpha\beta - \beta\alpha.$$
$$2\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha; \quad 2\mathrm{V}\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha.$$
$$2\mathrm{S}\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta + \delta\gamma\beta\alpha; \quad 2\mathrm{V}\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta - \delta\gamma\beta\alpha.$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

(II.) Est ist allgemein

$$\delta\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = \alpha\mathrm{S}\beta\gamma\delta - \beta\mathrm{S}\gamma\delta\alpha + \gamma\mathrm{S}\delta\alpha\beta$$
$$= \alpha\mathrm{S}\beta\gamma\delta + \beta\mathrm{S}\alpha\gamma\delta + \gamma\mathrm{S}\alpha\beta\delta.$$

Eine einfache Herleitung dieses Satzes findet sich in §. 44, 9, wo wir gezeigt haben, dass das ϱ_m irgend eines Punktes m

$$\varrho_\mathrm{m} = \alpha\,\mathrm{Cos}_1\,\mathrm{m} + \beta\,\mathrm{Cos}_2\,\mathrm{m} + \gamma\,\mathrm{Cos}_3\,\mathrm{m}.$$

Da aber nach einem früheren Satze dieses Paragraphen $-\mathrm{S}\alpha\beta\gamma$ gleich 6 Vol oabc ist, so ist in der That vorstehender Ausdruck für ϱ_m nur eine Umformung von

$$\varrho\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = \alpha\mathrm{S}\beta\gamma\varrho + \beta\mathrm{S}\gamma\alpha\varrho + \gamma\mathrm{S}\alpha\beta\varrho,$$

und damit die Richtigkeit desselben erwiesen. Direct finden wir ihn durch folgende Entwickelung.

Es ist

$$\mathrm{V}(\alpha\mathrm{V}\beta\gamma) = \gamma\mathrm{S}\alpha\beta - \beta\mathrm{S}\alpha\gamma,$$

und wenn man α ersetzt durch $\mathrm{V}\alpha\delta$,

$$\mathrm{V}(\mathrm{V}\alpha\delta.\mathrm{V}\beta\gamma) = \gamma\mathrm{S}\alpha\delta\beta - \beta\mathrm{S}\alpha\delta\gamma.$$

Ebenso findet man

$$\mathrm{V}(\mathrm{V}\beta\gamma.\mathrm{V}\alpha\delta) = \delta\mathrm{S}\beta\gamma\alpha - \alpha\mathrm{S}\beta\gamma\delta.$$

Da aber $\mathrm{V}(\mathrm{V}\beta\gamma.\mathrm{V}\alpha\delta) = -\mathrm{V}(\mathrm{V}\alpha\delta.\mathrm{V}\beta\gamma)$,

so erhalten wir durch Addition

$$\delta\mathrm{S}\beta\gamma\alpha - \alpha\mathrm{S}\beta\gamma\delta + \gamma\mathrm{S}\alpha\delta\beta - \beta\mathrm{S}\alpha\delta\gamma = 0,$$

oder in alphabetischer Ordnung

$$\alpha\mathrm{S}\beta\gamma\delta - \beta\mathrm{S}\gamma\delta\alpha + \gamma\mathrm{S}\delta\alpha\beta - \delta\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = 0,$$

oder endlich

$$\delta\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = \alpha\mathrm{S}\beta\gamma\delta - \beta\mathrm{S}\gamma\delta\alpha + \gamma\mathrm{S}\delta\alpha\beta,$$

und mit einer erlaubten Aenderung

$$\delta\mathrm{S}\alpha\beta\gamma = \alpha\mathrm{S}\beta\gamma\delta + \beta\mathrm{S}\gamma\alpha\delta + \gamma\mathrm{S}\alpha\beta\delta.$$

(III.) Es ist auch

$$\delta S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\delta + V\beta\gamma S\alpha\delta + V\gamma\alpha S\beta\delta.$$

Die Ableitung dieser Formel kann dadurch erfolgen, dass man $V(\gamma\delta\alpha\beta)$ einmal setzt

$$\begin{aligned} V(\gamma.\delta\alpha\beta) &= V.\gamma(S\delta\alpha\beta + V\delta\alpha\beta) \\ &= \gamma S\alpha\beta\delta + V.\gamma(\delta S\alpha\beta - \alpha S\beta\delta + \beta S\delta\alpha) \\ &= \gamma S\alpha\beta\delta + V.\gamma\delta S\alpha\beta - V.\gamma\alpha S\beta\delta \\ &\quad + V.\gamma\beta S\delta\alpha; \end{aligned}$$

und dann, dass man für $V(\gamma\delta\alpha\beta)$ setzt

$$\begin{aligned} V(\gamma\delta.\alpha\beta) &= V.(S\gamma\delta + V\gamma\delta)(S\alpha\beta + V\alpha\beta) \\ &= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta + V.V\gamma\delta V\alpha\beta \\ &= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta - V.V\alpha\beta V\gamma\delta \\ &= V\alpha\beta S\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta - \delta S.\alpha\beta\gamma + \gamma S.\alpha\beta\delta. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke erhält man die verlangte Gleichung.

Dasselbe Resultat lässt sich aber auch mit Hilfe dreier Unbekannten x, y, z finden. Setzen wir nämlich

$$\delta = xV\alpha\beta + yV\beta\gamma + zV\gamma\alpha,$$

so ist

$$\gamma\delta = x\gamma V\alpha\beta + y\gamma V\beta\gamma + z\gamma V\gamma\alpha,$$

daher

$$S\gamma\delta = xS\gamma V\alpha\beta = xS\alpha\beta\gamma,$$

da die Glieder mit y und z wegfallen. Denn wir haben

$$\begin{aligned} Sy\gamma V\beta\gamma &= -yS\gamma\beta\gamma = yS\beta\gamma^2 \\ &= y\gamma^2 S\beta = 0. \end{aligned}$$

Ebenso haben wir $Sz\gamma V\gamma\alpha = 0.$

Daher ist $x = S\gamma\delta : S\alpha\beta\gamma.$

Die Werthe von y und z findet man durch Entwickelung von $S\alpha\delta$ und $S\beta\delta$. Man bekommt so

$$y = S\alpha\delta : S\alpha\beta\gamma,$$
$$z = S\beta\delta : S\alpha\beta\gamma.$$

Ein ähnliches Verfahren kann dazu dienen, um den Ausdruck in II. für $\delta S\alpha\beta\gamma$ zu entwickeln. Setzen wir nämlich

$$\delta = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

so ergiebt sich hieraus, wenn man der Reihe nach mit $S.\beta\gamma$, $S.\gamma\alpha$ und $S.\alpha\beta$ auf diese Gleichung operirt,

$$S\beta\gamma\delta = xS\alpha\beta\gamma, \quad S\gamma\delta\alpha = -yS\alpha\beta\gamma,$$
$$S\delta\alpha\beta = zS\alpha\beta\gamma.$$

Die aus den drei letzten Gleichungen entwickelten Werthe von x, y, z führen durch Einsetzen auf die genannte Relation.

(IV.) Ueber das Product von vier Vectoren mögen hier noch folgende Sätze folgen. Aus dem oben stehenden Ausdrucke

$$S\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta + \delta\gamma\beta\alpha$$

olgt

$$S\delta\gamma\beta\alpha = S\alpha\beta\gamma\delta.$$

Ausserdem ist

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma\delta &= S.[S(\alpha\beta\gamma) + V(\alpha\beta\gamma)]\delta \\ &= S(V\alpha\beta\gamma)\delta = S\delta V(\alpha\beta\gamma) = S\delta\alpha\beta\gamma, \end{aligned}$$

d. h. eine cyklische Aenderung in der Factorenfolge ändert den Werth des Scalars nicht. Diess sind aber die einzigen einfachen Relationen, die zwischen den Scalaren der Producte von vier Vectoren bestehen, indem der nächstfolgende Satz zeigt, dass jede andre Vertauschung von Factoren ganz verschiedenwerthige Producte ergiebt. Es ist

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma\delta &= S(S\alpha\beta\gamma + V\alpha\beta\gamma)\delta = S.(V\alpha\beta\gamma)\delta \\ &= S(\alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta)\delta \\ &= S(\alpha\delta S\beta\gamma - \beta\delta S\gamma\alpha + \gamma\delta S\alpha\beta) \\ &= S\alpha\delta S\beta\gamma - S\beta\delta S\gamma\alpha + S\gamma\delta S\alpha\beta \\ &= S\alpha\beta S\gamma\delta - S\alpha\gamma S\beta\delta + S\alpha\delta S\beta\gamma. \end{aligned}$$

Mit Benutzung dieses Satzes finden wir

$$S\alpha\beta\delta\gamma = S\alpha\beta S\delta\gamma - S\alpha\delta S\beta\gamma + S\alpha\gamma S\beta\delta,$$

woraus sich keine einfache Beziehung zwischen den Scalaren von $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha\beta\delta\gamma$ ergiebt.

Setzt man

$$V\alpha\beta = \alpha\beta - S\alpha\beta,$$

so sieht man, dass

$$\begin{aligned} S(V\alpha\beta . V\gamma\delta) &= S(\alpha\beta - S\alpha\beta)\ (\gamma\delta - S\gamma\delta) \\ &= S\alpha\beta\gamma\delta - S\alpha\beta . S\gamma\delta \end{aligned}$$

ist, und hieraus ergiebt sich mit Benutzung des oben stehenden Ausdruckes für $S\alpha\beta\gamma\delta$

$$S(V\alpha\beta . V\gamma\delta) = S\alpha\beta S\gamma\delta - S\alpha\gamma\, S\beta\delta.$$

Die vorstehenden Formeln mögen genügen, um die Menge von Ausdrücken zu zeigen, die sich ergeben durch Umwandlung der Producte von Vectoren. Jede der so erlangten Gleichungen kann z. B. auf die Kugelfläche angewendet zur Herleitung von Sätzen der sphärischen Trigonometrie benutzt werden.

7. — Welchen Reichthum an Transformationen selbst ganz einfache Vectorenausdrücke zulassen, wollen wir an zwei Beispielen zeigen. Liegt o in der Mitte der Strecke $a_1 a$, und bezeichnen wir oa mit α, oa_1 daher mit $-\alpha$; während für einen beliebigen Punkt m der Vector om mit ϱ bezeichnet wird, so ist

$$(1.) \qquad T(\varrho + \alpha) = T(\varrho - \alpha)$$

der Ausdruck für die Gleichheit der Längen ma und ma_1. Für ein variables ϱ gilt also diese Beziehung von allen Punkten m der in o auf

$\alpha\alpha_1$ senkrechten Ebene. Dieselbe Beziehung wird aber auch ausgedrückt durch

$$(2) \qquad (\varrho + \alpha)^2 = (\varrho - \alpha)^2,$$

welches entwickelt giebt

$$\varrho^2 + 2\mathrm{S}\varrho\alpha + \alpha^2 = \varrho^2 - 2\mathrm{S}\varrho\alpha + \alpha^2,$$

woraus sich dann der dritte Ausdruck

$$(3) \qquad \mathrm{S}\varrho\alpha = 0$$

für dieselbe Beziehung ergiebt. Diese letzte Gleichung ist aber auch wiedergegeben durch

$$(4) \qquad \alpha\varrho + \varrho\alpha = 0,$$

statt welcher wir auch setzen können

$$(5) \qquad \alpha\varrho + \mathrm{K}\alpha\varrho = 0,$$

$$(6) \qquad \mathrm{SU}(\alpha : \varrho) = 0,$$

oder endlich

$$(7) \qquad \mathrm{TVU}(\varrho : \alpha) = 1.$$

Auch die Gleichung einer um o mit dem Radius a beschriebenen Kugelfläche lässt für den Abstand ϱ eines ihrer Punkte vom Mittelpunkte folgende Formen zu:

(1) $\mathrm{T}\varrho = \mathrm{T}\alpha$, (2) $\varrho^2 = \alpha^2$, (3) $\mathrm{T}(\varrho : \alpha) = 1$,

$$(4) \qquad \left(\mathrm{S}\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 - \left(\mathrm{V}\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = 1,$$

$$(5) \qquad \mathrm{S}(\varrho + \alpha)(\varrho - \alpha) = 0,$$

$$(6) \qquad \mathrm{T}(\varrho + \alpha)(\varrho - \alpha) = 2\mathrm{TV}\alpha\varrho,$$

$$(7) \qquad \varrho = (\varrho + \alpha)^{-1} . \alpha(\varrho + \alpha),$$

$$(8) \qquad (\varrho + \alpha)^2 - 2\mathrm{S}\alpha(\varrho + \alpha) = 0.$$

Aus jedem dieser verschiedenen Ausdrücke, die einer aus dem anderen herleitbar sind, lässt sich, wie wir sehen werden, eine geometrische Eigenschaft des Kreises oder der Kugelfläche herauslesen, so dass diese Gleichungen selbst als der Ausdruck dieser Eigenschaft mittelst Quaternionen aufgefasst werden können.

8. — Wir fügen noch ein Beispiel über die Transformation eines Ausdrucks bei. — Es soll der Scalar von $\mathrm{V}\alpha\beta . \mathrm{V}\beta\gamma$ gesucht werden; dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(\mathrm{V}\alpha\beta . \mathrm{V}\beta\gamma) &= \mathrm{S} . \mathrm{V}\alpha\beta\mathrm{V}\beta\gamma = \mathrm{S} . \alpha\beta\mathrm{V}\beta\gamma = \mathrm{S}\alpha\mathrm{V} . \beta\mathrm{V}\beta\gamma \\ &= -\mathrm{S}\alpha\mathrm{V} . (\mathrm{V}\beta\gamma)\beta = \mathrm{S}\alpha\mathrm{V} . (\mathrm{V}\gamma\beta)\beta \\ &= \mathrm{S} . \alpha\mathrm{V}(\gamma\beta)\beta = \mathrm{S} . \mathrm{V}(\gamma\beta)\beta\alpha \\ &= \mathrm{SV}\gamma\beta\mathrm{V}\beta\alpha = \mathrm{S} . \mathrm{V}\gamma\beta . \mathrm{V}\beta\alpha = \text{etc.}\end{aligned}$$

Indem wir mit dem letzten Ausdrucke wieder bei einer Form angelangt sind, die der ersten ähnlich ist, können wir daraus noch eine ganze Reihe ableiten, die aus den vorstehenden durch Vertauschung der Vectoren entstehen.

9. — Bei verschiedenen Rechnungen mit Vectoren und Quaternionen elangt man auch wieder zu dem Imaginären der Algebra. Sollen wir . B. die Vectoren der Schnittpunkte der Geraden

$$\varrho = \beta + x\gamma$$

iit der Kugelfläche, deren Gleichung

$$\varrho^2 = \alpha^2$$

st, suchen, so ist

$$(\beta + x\gamma)^2 = \alpha^2$$

u setzen. Wir erlangen dadurch die quadratische Gleichung

$$\beta^2 + 2xS\beta\gamma + x^2\gamma^2 = \alpha^2,$$

relche zu reellen, gleichen oder imaginären Werthen des x führt je nachdem

$$(S\beta\gamma)^2 \gtreqless \gamma^2(\beta^2 - \alpha^2).$$

In dem letzten Falle ergiebt sich für x ein Werth von der Form $a + b\sqrt{-1}$. Es ist aber jetzt $\sqrt{-1}$ durchaus kein Vector, sondern, wie sich aus der Herleitung ergiebt, ein Scalar, dem nun auch als Scalar die Eigenschaft der Commutativität zukommt. Die Rechnung mit Vector- oder Quaternionenausdrücken, welche $\sqrt{-1}$ enthalten, bietet keine Schwierigkeit. Diese Ausdrücke lassen sich immer auf die Form bringen

$$q = q_1 + q_2\sqrt{-1},$$

worin q_1 und q_2 reelle Quaternionen sind, und da hierin $\sqrt{-1}$ ein Scalar ist, so haben wir

$$S(q_1 + q_2\sqrt{-1}) = Sq_1 + \sqrt{-1}\,Sq_2,$$
$$V(q_1 + q_2\sqrt{-1}) = Vq_2 + \sqrt{-1}\,Vq_2.$$

Den Tensor einer solchen complexen Quaternion finden wir nach dem Satze dass

$$\begin{aligned}(Tq)^2 &= qKq = (Sq + Vq)\,(Sq - Vq)\\ &= (Sq_1 + Sq_2\sqrt{-1} + Vq_1 + Vq_2\sqrt{-1})\\ &\quad\cdot(Sq_1 + Sq_2\sqrt{-1} - Vq_1 - Vq_2\sqrt{-1})\\ &= (Sq_1 + Sq_2\sqrt{-1})^2 - (Vq_1 + Vq_2\sqrt{-1})^2\\ &= (Tq_1)^2 - (Tq_2)^2 + 2\sqrt{-1}\cdot S(q_1Kq_2).\end{aligned}$$

Aus dieser Form des Tensors sieht man, dass der Tensor einer complexen Quaternion zu Null werden kann, ohne dass die Elemente q_1 und q_2 es sind. Es braucht nur $Tq_1 = Tq_2$ und $S(q_1Kq_2) = 0$ zu sein.

Allgemein kann das Product qr zweier complexen Quaternionen Null werden, ohne dass q oder r Null ist. Denn ist

$$q\cdot r = (q_1 + q_2\sqrt{-1})\,(r_1 + r_2\sqrt{-1}),$$

so führt

$$q = q_2(\alpha + \sqrt{-1}),$$
$$r = (\alpha - \sqrt{-1})r_1$$

zu einem Producte vom Werthe Null, wenn $T\alpha = 1$ ist. (Vergl. Tait Quaternions, Cap. III.),

Hamilton nennt

$$q = q_1 + q_2\sqrt{-1}$$

eine Biquaternion und $\varrho = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ einen Bivector. Wir haben schon früher (§. 42, 1) den Namen Biquaternion für die Verbindung einer goniometrischen und einer longimetrischen Quaternion benutzt und halten uns dazu berechtigt, da Hankel in seiner Theorie der complexen Zahlen nachgewiesen, dass die Sätze über Quaternionen sowol für reelle wie für complexe Scalare gelten. Man kann, wo es nöthig ist, Ausdrücke von der Form

$$q_1 + q_2\sqrt{-1}$$

einfach als complexe Quaternionen bezeichnen.

§. 54. Anwendung der Quaternionen in der Geometrie.

1. — Sätze der Planimetrie.

(I.) In einem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Seiten.

Sind in dem Parallelogramme $abcb$ die Seiten $ab = bc = \alpha$, $ab = bc = \beta$, so ist $ac = \alpha + \beta$, $bb = \beta - \alpha$, daher

$$ac^2 = (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2S\alpha\beta + \beta^2,$$
$$bb^2 = (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2S\alpha\beta + \beta^2,$$

mithin $ac^2 + bb^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = ab^2 + bc^2 + cb^2 + ba^2$.

(II.) Höhengleiche Parallelogramme über derselben Grundlinie sind flächengleich.

Es seien $abcb$ und abc_1b_1 die beiden Parallelogramme, und es sei $ab = \alpha$, $ab = \beta$, so ist nach §. 50, 2

$$\text{Inhalt}\quad abcb = TV\alpha\beta,$$
$$\text{Inhalt}\quad abc_1b_1 = TV\alpha(\beta + x\alpha),$$

da $ab_1 = \beta + x\alpha$ ist. Nun ist aber

$$TV\alpha(\beta + x\alpha) = TV(\alpha\beta + x\alpha^2) = TV\alpha\beta,$$

weil $x\alpha^2$ ein Scalar, sein Vector also gleich Null ist.

(III.) Die Summe der Aussenwinkel eines Dreiecks ist vier Rechte.

Ist η ein Einheits-Vector senkrecht zur Ebene des Dreiecks, und sind λ, μ, ν die Winkel, welche die Verlängerungen der Seiten a, b, c des Dreiecks mit b, c, a machen, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \eta^{\frac{2\lambda}{\pi}}, \quad \frac{\gamma}{\beta} = \eta^{\frac{2\mu}{\pi}}, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \eta^{\frac{2\nu}{\pi}},$$

wobei α, β und γ Einheits-Vectoren in den Richtungen der Dreiecksseiten vorstellen.

Daher ist

$$\beta = \eta^{\frac{2\lambda}{\pi}} \cdot \alpha,$$

$$\gamma = \eta^{\frac{2\mu}{\pi}} \cdot \beta = \eta^{\frac{2\mu}{\pi}} \cdot \eta^{\frac{2\lambda}{\pi}} \alpha,$$

$$\alpha = \eta^{\frac{2\nu}{\pi}} \cdot \gamma = \eta^{\frac{2\nu}{\pi}} \cdot \eta^{\frac{2\mu}{\pi}} \cdot \eta^{\frac{2\lambda}{\pi}} \alpha.$$

Es muss mithin

$$\eta^{\frac{2\nu}{\pi} + \frac{2\mu}{\pi} + \frac{2\lambda}{\pi}} = 1$$

sein. Diess ist nur möglich, wenn der Exponent an η ein gerades Vielfaches von zwei ist; setzen wir ihn also vier, so ist

$$\lambda + \mu + \nu = 2\pi.$$

Kürzer folgt dieses Resultat daraus, dass

$$\mathrm{U}\left(\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 \text{ ist.}$$

(IV.) Was stellt $\alpha\beta\alpha^{-1} = \varrho$ dar?

Zuerst sieht man, dass ϱ ein Vector von der Länge $\mathrm{T}\beta$ ist, da sich die Tensoren von α und α^{-1} tilgen. Ferner ist

$$\beta\alpha\varrho = \beta\alpha^2\beta\alpha^{-1} = \alpha^2\beta^2\alpha^{-1},$$

und mithin

$$\mathrm{S}\beta\alpha\varrho = \alpha^2\beta^2\mathrm{S}\alpha^{-1} = 0.$$

Es liegt also ϱ mit α und β in einer Ebene. Endlich ist

$$\mathrm{S}\alpha\varrho = \mathrm{S}\varrho\alpha = \mathrm{S}\alpha\beta\alpha^{-1} \cdot \alpha = \mathrm{S}\alpha\beta,$$

so dass ϱ und β mit α gleiche Winkel bilden, aber offenbar auf entgegengesetzten Seiten von α, weil sonst α mit β zusammenfiele.

Ist also β ein einfallender Lichtstrahl in einem Punkte einer Fläche, wo α die Normale ist, so liegt ϱ in dem reflectirten Strahl.

Das letzte Resultat folgt auch durch Vergleichung der Versoren von $\frac{\varrho}{\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$. Denn aus

$$\varrho = \alpha\beta\alpha^{-1}$$

folgt

$$\varrho\,\alpha = \alpha\beta,$$

und hieraus

$$\mathrm{U}\frac{\varrho}{\alpha} = \mathrm{U}\frac{\alpha}{\beta}.$$

(V.) Sind $\mathfrak{ab} = \alpha$, $\mathfrak{bc} = \beta$, $\mathfrak{cd} = \gamma$, $\mathfrak{da} = \delta$ die Seiten eines Kreisvierecks, so ist

$$\alpha\beta\gamma = \frac{\mathrm{T}\alpha \cdot \mathrm{T}\beta \cdot \mathrm{T}\gamma}{\mathrm{T}\delta}\,\delta.$$

Denn für die Einheitsvectoren α_1, β_1, γ_1, δ_1 in den Richtungen von α, β, γ, δ finden wir

$$\alpha_1 \beta_1 = -\cos\alpha\beta + \eta \sin\alpha\beta,$$

wo $\sphericalangle\, \alpha\beta$ der an $\mathfrak{b}$ liegende Aussenwinkel und η senkrecht zu $\alpha\beta$ ist.

Dieser Aussenwinkel $\alpha\beta$ ist aber auch gleich dem Innenwinkel bei $\mathfrak{b}$, dessen Nebenwinkel $\gamma\delta$ ist. Daher ist auch

$$\alpha_1 \beta_1 = (\cos\gamma\delta + \eta \sin\gamma\delta).$$

Da ferner $\delta_1 . \gamma_1 = \cos\gamma\delta + \eta \sin\gamma\delta$, also $\delta_1 = (\cos\gamma\delta + \eta \sin\gamma\delta) . \gamma_1$, so wird $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \delta_1$ und hieraus mit Einführung der Tensoren

$$\alpha\beta\gamma = \frac{\mathrm{T}\alpha . \mathrm{T}\beta . \mathrm{T}\gamma}{\mathrm{T}\delta}\, \delta.$$

Hieraus folgt

$$\alpha\beta\gamma\delta = -\mathrm{T}\alpha\, \mathrm{T}\beta\, \mathrm{T}\gamma\, \mathrm{T}\delta.$$

Wenn das Kreisviereck ein überschlagenes ist, so wird $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ zu einem positiven Werthe.

Fällt $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ zusammen, so wird die Seite $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ zur Tangente. Für Einheitsvectoren ist also

$$\delta_1 = \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$$

der Ausdruck für den Einheitsvector in der Richtung der Tangente im Punkte $\mathfrak{a}$ des um $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ beschriebenen Kreises. Es sind daher

$$\varrho_{\mathfrak{a}} = \alpha\beta\gamma, \quad \varrho_{\mathfrak{b}} = \beta\gamma\alpha, \quad \varrho_{\mathfrak{c}} = \gamma\alpha\beta$$

Vectoren in der Richtung der Tangenten in den Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ an den um $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ beschriebenen Kreis, wobei $\mathrm{T}\varrho = \mathrm{T}\alpha\, \mathrm{T}\beta\, \mathrm{T}\gamma$.

Direct lässt sich zeigen, dass $\varrho = \alpha\beta\gamma$ (wenn α, β, γ derselben Ebene angehören) die Tangente in $\mathfrak{a}$ ist, durch folgende Schlussweise:

$$\varrho = \alpha\beta\gamma = \alpha\beta^2\beta^{-1}\gamma = \beta^2 \frac{\alpha}{\beta}\gamma = -(\mathrm{T}\beta)^2 \frac{\alpha}{\beta}\gamma.$$

Der Versor von $\frac{\alpha}{\beta}$, der β in die Richtung α dreht, dreht also γ in die Richtung von ϱ, d. h. Winkel $\alpha\beta$ = Winkel $\gamma\varrho$, die bekannte Eigenschaft des Peripheriewinkels und des Winkels zwischen Sehne und Tangents, es muss also ϱ in der That ein Vector sein in der Richtung der Tangente in $\mathfrak{a}$.

Drückt man (für das Kreisviereck) in $\mathfrak{a}\mathfrak{b} . \mathfrak{b}\mathfrak{c} . \mathfrak{c}\mathfrak{b} . \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \pm \mathrm{e}^2$ die Seiten durch die Differenzen der Vectoren der Endpunkte aus, und seien jetzt die Vectoren von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ bezüglich α, β, γ, δ, so erhalten wir

$$(\beta - \alpha)\,(\gamma - \beta)\,(\delta - \gamma)\,(\alpha - \delta) = \pm \mathrm{e}^2;$$

betrachten wir nun $\mathfrak{d}$ als einen variabeln Punkt mit dem Vector ϱ, so ist hieraus leicht die Gleichung des Kreises ableitbar in der Form

$$\mathrm{V}(\alpha - \beta)\,(\beta - \gamma)\,(\gamma - \varrho)\,(\varrho - \alpha) = 0.$$

2. — Stereometrische Sätze.

(I.) Directer Nachweiss, dass wenn α, β, γ drei coinitiale aber nicht

complanare Vectoren sind, $S(\alpha\beta\gamma)$ oder $S.\alpha\beta\gamma$ gleich dem negativen sechsfachen Volumen des Tetraeders, wovon α, β und γ drei an einer Ecke liegende Kanten sind.

Es ist $S.\alpha\beta\gamma = S(S\alpha\beta + V\alpha\beta)\gamma = S(V\alpha\beta)\gamma$, weil $S.(S\alpha\beta)\gamma$ als Scalar eines Vectors gleich Null ist. Nun ist

$$V\alpha\beta = T\alpha\, T\beta \sin\alpha\beta\,.\,\eta,$$

wenn η ein zu $\alpha\beta$ senkrechter Einheitsvector ist; daher haben wir

$$\begin{aligned} S.\alpha\beta\gamma = S(V\alpha\beta)\gamma &= T\alpha T\beta \sin\alpha\beta\, S\eta\gamma \\ &= -T\alpha\, T\beta\, T\gamma\, \sin(\alpha\beta)\, \cos(\eta\gamma) \\ &= -abc \sin(ab)\, \cos(\eta\gamma). \end{aligned}$$

Hierin ist aber $ab \sin ab$ der doppelte Inhalt des Dreiecks mit den Seiten α und β, während $c.\cos(\eta\gamma)$ gleich c mal dem Sinus des Neigungswinkels der Kante c gegen die Ebene ab ist; mithin ist

$$-S.\alpha\beta\gamma = 6\,\mathrm{Vol}(abc).$$

(II.) Die Bedingungen zu finden, unter denen die von den Ecken eines Tetraeders auf die Gegenseiten gefällten Lothe durch einen Punkt gehen.

Es seien die von der Ecke b des Tetraeders ausgehenden Vectorkanten ba, bb und bc mit α, β und γ bezeichnet, dann ist $V\beta\gamma$ ein Perpendikel auf $\beta\gamma$, das wir von a aus gezogen denken, und $V\gamma\alpha$ ein Perpendikel auf $\gamma\alpha$, das von b aus gefällt sei. Schneiden diese Lothe einander in e, so ist abe ein Dreieck, und da $ab = \beta - \alpha$, so haben wir in $\beta-\alpha$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$ drei Vectoren derselben Ebene; es ist also

$$S[(\beta-\alpha).V\beta\gamma.V\gamma\alpha] = S(\beta-\alpha)\,V(V\beta\gamma.V\gamma\alpha) = 0.$$

Nun ist nach §. 53, 5, V.

$$V(V\beta\gamma.V\gamma\alpha) = -\gamma S\beta\gamma\alpha,$$

also

$$\begin{aligned} S(\beta-\alpha)\,V(V\beta\gamma.V\gamma\alpha) &= -S(\beta\gamma-\alpha\gamma)\,S\beta\gamma\alpha \\ &= (S\beta\gamma - S\alpha\gamma)\,S\beta\gamma\alpha = 0. \end{aligned}$$

Mithin ist $S\beta\gamma = S\alpha\gamma$. Nun ist

$$\begin{aligned} ba^2 + bc^2 = \alpha^2 + (\gamma-\beta)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2S\beta\gamma \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2S\alpha\gamma \\ &= (\gamma-\alpha)^2 + \beta^2 = ac^2 + bb^2, \end{aligned}$$

d. h. als Bedingung dafür, dass die Höhen im Tetraeder durch einen Punkt gehen, finden wir, dass die Summe der Quadrate von je zwei Gegenkanten dieselbe sein muss.

(III.) Ist abcb ein räumliches Viereck, dessen aufeinander folgende Seiten α, β, γ, δ sind, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ eine Quaternion, deren Vector dem zu a führenden Radius der dem Viereck umschriebenen Kugelfläche parallel geht.

Es ist nämlich das Product

$$ab.bc.cb.ba = (ab.bc.ca).(ac.cb.ba) : (Tac)^2.$$

Nun stellen die beiden in Klammer stehenden Producte die Tangenten dar, die in a an die um die Dreiecke abc und acb beschriebenen Kreise construirt werden können. Nennen wir dieselben als Vectoren τ_1 und τ_2, so ist also $ab \,.\, bc \,.\, cb \,.\, ba = \tau_1 \,.\, \tau_2 : (Tac)^2$.

Die beiden genannten Kreise liegen aber auf der um $abcb$ beschriebenen Kugel, nnd τ_1 und τ_2 sind daher auch Tangenten an diese Kugel. $\tau_1 \tau_2$ selbst ist eine Quaternion, dasselbe gilt von $\tau_1 \tau_2 : ac^2$, weil ac^2 ein Scalar ist. Der Vector dieser Quaternion ist senkrecht zu den beiden Tangenten τ_1 und τ_2, mithin senkrecht auf der dadurch bestimmten Berührungsebene, er geht also parallel zu dem Radius des Berührungspunktes a, was wir beweisen wollten.

(IV.) Durch ähnliche Betrachtungen lässt sich nun nachweisen, dass das Product der fünf Vectorseiten eines räumlichen einer Kugel eingeschriebenen Fünfecks ein Tangentenvector im Anfangspunkt des Fünfecks ist.

Es ist nämlich kurz

$$ab \,.\, bc \,.\, cb \,.\, be \,.\, ea = (ab \,.\, bc \,.\, ca) \,.\, (ac \,.\, cb \,.\, ba) \,.\, (ab \,.\, be \,.\, ea) : (ac^2 \,.\, ab^2)$$
$$= \tau_1 \,.\, \tau_2 \,.\, \tau_3 : (ac^2 \,.\, ab^2),$$

wo leicht nachzuweisen, dass τ_1, τ_2, τ_3 Berührende in a an die Kugel sind, mithin in einer Ebene liegen und zum Product einen complanaren Vector τ geben, da $S\tau_1 \tau_2 \tau_3 = 0$ ist. Betrachten wir den Punkt m als einen variabeln Punkt der durch o, a, b, c gelegten Kugelfläche, nennen die Vectoren von a, b, c, m bezüglich $\sigma, \beta, \gamma, \varrho$, so ist nach dem vorstehenden Satze in dem räumlichen Fünfecke $oabcm$ das Product der fünf Vectorseiten ein Tangentenvector, der Scalar daher Null, mithin

$$S\alpha(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\varrho - \gamma)(-\varrho) = 0.$$

Die Entwicklung der linken Seite giebt

$$\alpha^2 S\beta\gamma\varrho + \beta^2 S\gamma\alpha\varrho + \gamma^2 S\alpha\beta\varrho - \varrho^2 S\alpha\beta\gamma = 0,$$

oder

$$\varrho^2 S\alpha\beta\gamma = \alpha^2 S\beta\gamma\varrho + \beta^2 S\gamma\alpha\varrho + \gamma^2 S\alpha\beta\varrho$$

als Gleichung der Kugelfläche durch die Punkte o, a, b, c. Dass die Vectoren dieser Punkte in der That dieser Gleichung genügen, ergiebt sich durch Einsetzen von $0, \alpha, \beta, \gamma$ für ϱ.

Die Gleichung lässt sich mit Benutzung der auf das Tetraeder $oabc$ bezogenen Raumfunctionen des Punktes m auch auf die Form bringen

$$\varrho^2 = \alpha^2 \mathrm{Cos}_1 m + \beta^2 \mathrm{Cos}_2 m + \gamma^2 \mathrm{Cos}_3 m,$$

woraus sich als Gleichung des Kreises durch o, a, b ergiebt

$$\varrho^2 = \alpha^2 \mathrm{Cos}_1 m + \beta^2 \mathrm{Cos}_2 m,$$

Resultate, die sich leicht auf dem Wege der analytischen Geometrie bestätigen lassen.

Aus der oben stehenden Gleichung der Kugelfläche, wobei der Anfang der Vectoren auf der Fläche selbst liegt, lässt sich für einen beliebigen Anfang o derselben, und wenn wir mit α, β, γ, δ, ϱ die Vectoren der vier festen Punkte a, b, c, d und des variabeln m bezeichnen, als allgemeinere Gleichung finden

$$S(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\varrho)(\varrho-\alpha)=0.$$

Allgemein lässt sich auch beweisen, dass das Product der Seiten eines Polygones, welches einer Kugel eingeschrieben ist, entweder einen Vector liefert, der die Kugel im Anfangspunkt des Polygones berührt, oder eine Quaternion, deren Axe mit dem Radius des Anfangspunktes des Polygones zusammen fällt, je nachdem die Eckzahl der Figur ungerade oder gerade ist.

3. — Die Grundformeln der ebenen Trigonometrie.

(I.) In jedem Dreiecke a b c ist

$$ac = ab + bc,$$

daher $$ac^2 = ac \,.\, ab + ac \,.\, bc,$$

und folglich $$Sac^2 = S(ac \,.\, ab) + S(ac \,.\, bc),$$

oder $$-(Tac)^2 = -Tac \,.\, Tab \,.\cos A - Tac \,.\, Tbc \,.\cos C,$$

und in der gewöhnlichen Bezeichnung

$$b^2 = bc\cos A + ba\cos C,$$

oder $$b = a\cos C + c\cos A.$$

(II.) Ferner ist

$$ab \,.\, ac = ab^2 + ab \,.\, bc.$$

Nimmt man nun von beiden Seiten den Vector, so ist, da

$$V(ab^2) = V(-c^2) = 0,$$

$$V(ab \,.\, ac) = V(ab \,.\, bc),$$

oder $$cb\sin A \,.\, \eta = ca\sin B \,.\, \eta,$$

mithin $$b\sin A = a\sin B.$$

(III.) Endlich ergiebt sich leicht aus

$$bc = ac - ab,$$

$$bc^2 = (ac - ab)^2 = ac^2 - 2Sac \,.\, ab + ab^2,$$

oder $$-a^2 = -b^2 + 2bc\cos A - c^2,$$

d. h. $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

4. — Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

(I.) Es seien α, β, γ die Einheitsradien nach den Ecken des sphärischen Dreiecks a, b, c. Dann ist, wenn wir die Winkel des Dreiecks mit A, B, C, die Bogen mit a, b, c bezeichnen,

$$S\alpha\beta = -\cos c, \quad S\beta\gamma = -\cos a, \quad S\gamma\alpha = -\cos b,$$

$$TV\alpha\beta = \sin c, \quad TV\beta\gamma = \sin a, \quad TV\gamma\alpha = \sin b.$$

Sind ferner a', b', c' die Ecken des Polardreiecks von a, b, c, so ist

$$UV\alpha\beta = oc', \quad UV\beta\gamma = oa', \quad UV\gamma\alpha = ob'.$$

Folglich ist

$$S.U\,V\alpha\beta\;U\,V\beta\gamma = -\cos(\pi - B) = \cos B,$$
$$S.U\,V\beta\gamma\;U\,V\gamma\alpha = -\cos(\pi - C) = \cos C,$$
$$S.U\,V\gamma\alpha\;U\,V\alpha\beta = -\cos(\pi - A) = \cos A,$$

während

$$T(U\,V\alpha\beta\,U\,V\beta\gamma) = \sin(\pi - B) = \sin B, \quad \text{etc.}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} S(V\alpha\beta\,.\,V\beta\gamma) &= S(V\alpha\beta + S\alpha\beta)\,V\beta\gamma = S.\alpha\beta\,V\beta\gamma \\ &= S\alpha(\beta V\beta\gamma) = S\alpha[V(\beta V\beta\gamma)] \\ &= S\alpha(\gamma S\beta^2 - \beta S\beta\gamma) \text{ nach §. 53, 5, IV.} \\ &= \beta^2 S\alpha\gamma - S\alpha\beta\,.\,S\beta\gamma \\ &= \cos b - \cos c\cos a, \end{aligned}$$

indem $\beta^2 = -1$, $S\alpha\gamma$ aber $= -\cos b$ ist.

Ferner ist

$$\begin{aligned} SV\alpha\beta\,.\,V\beta\gamma &= T(V\alpha\beta)\,.\,T(V\beta\gamma)\,.\,S.\,U\,V\alpha\beta\,U\,V\beta\gamma \\ &= \sin c\,\sin a\,\cos B, \end{aligned}$$

oder durch Verbindung mit dem oben stehenden Werthe

$$\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos B,$$

welches die eine Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist.

Kürzer gelangt man zu derselben Formel durch die Gleichung

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Nimmt man hiervon beiderseits den Scalartheil, so ist

$$S\frac{\beta}{\gamma} = S\frac{\beta}{\alpha}\,.\,\frac{\alpha}{\gamma} = S\frac{\beta}{\alpha}\,.\,S\frac{\alpha}{\gamma} + S.V\frac{\beta}{\alpha}\;V\;\frac{\alpha}{\gamma},$$

wie man leicht findet durch Zerlegung der Quotienten in ihren Scalar- und Vectortheil. Uebersetzt lautet die Gleichung

$$\cos a = \cos c\,\cos b + \sin c\,\sin b\,S(\mathfrak{o}c_1\,.\,\mathfrak{o}b_1),$$

oder

$$\cos a = \cos b\,\cos c + \sin b\,\sin c\,\cos A,$$

da

$$S(\mathfrak{o}c_1\,.\,\mathfrak{o}b_1) = -\cos(\pi - A) = \cos A \text{ ist.}$$

(II.) Um den Sinussatz $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$ abzuleiten, setzen wir

$$V\alpha\beta\,.\,V\beta\gamma = \gamma_1\sin c\,.\,\alpha_1\sin a,$$

daher

$$V.(V\alpha\beta\,.\,V\beta\gamma) = \sin a\,\sin c\,\sin B\,.\,\beta.$$

Es ist aber auch nach §. 53, 5, VI.

$$V(V\alpha\beta\,.\,V\beta\gamma) = -\beta S.\,\alpha\beta\gamma,$$

und da $-S\alpha\beta\gamma$ das sechsfache Volumen des Tetraeders mit den Kanten α, β, γ ist, so haben wir dafür $T\alpha\;T\beta\;T\gamma\sin c\sin\varphi$, wenn φ den Neigungswinkel von γ gegen $\alpha\beta$ ist. Die Tensoren von α, β und γ sind aber 1, daher ist $-\beta S\alpha\beta\gamma = -\beta\sin c\sin\varphi$. Durch Gleichsetzung der beiden Werthe von $V(V\alpha\beta\,.\,V\beta\gamma)$ erhalten wir $\sin\varphi = \sin a\sin B$. Ebenso fände man $\sin\varphi = \sin b\sin A$, und hieraus die verlangte Formel.

5. — Die Gleichungen der Geraden und der Ebene.

(I.) Die Gleichung einer Geraden, die durch den Anfang der Vectoren und parallel zu dem Vector α geht, ist

$$\varrho = \mathrm{x}\alpha, \quad \text{oder} \quad \mathrm{V}\alpha\varrho = 0, \quad \text{oder} \quad \mathrm{U}\varrho = \mathrm{U}\alpha,$$

Ausdrücke, in denen überall ϱ nur linear vorkommt, und worin überdiess ein unbestimmter Scalar enthalten ist. Die beiden letzten Gleichungen lassen sich nämlich auf die erste zurückführen, indem $\mathrm{V}\alpha\varrho = 0$ nur entstanden sein kann aus einem Ausdruck von der Form

$$\alpha\varrho = \pm \mathrm{y},$$

woraus sich ergiebt

$$\varrho = \pm \mathrm{y} : \alpha = \pm \frac{\mathrm{y}\alpha}{\alpha^2} = \mp \frac{\mathrm{y}}{(\mathrm{T}\alpha)^2} \cdot \alpha = \mathrm{x}\alpha.$$

Ebenso führt $\mathrm{U}\varrho = \mathrm{U}\alpha$ direct zu $\varrho = \mathrm{x}\alpha$.

(II.) Die Gleichung einer Geraden, die parallel zu α und durch den Endpunkt von β geht, ist

$$\varrho = \beta + \mathrm{x}\alpha.$$

Daher sind

$$\varrho = \beta_1 + \mathrm{x}_1\alpha \quad \text{und} \quad \varrho = \beta_2 + \mathrm{x}_2\alpha$$

die Gleichungen zweier parallelen Geraden durch die Enden von β_1 und β_2, Gleichungen, die auch ersetzt werden können, durch

$$\mathrm{V}\alpha(\varrho - \beta_1) = 0, \quad \mathrm{V}\alpha(\varrho - \beta_2) = 0.$$

Letztere Ausdrücke ergeben sich leicht aus

$$\alpha(\varrho - \beta_1) = \mathrm{x}_1\alpha^2 \quad \text{etc.}$$

(III.) Die Gleichung der Geraden durch den Endpunkt von β und senkrecht zu α ist

$$\varrho = \beta + \mathrm{x}\alpha\mathrm{V}\alpha\beta.$$

Denn es sei γ ein zu α in der Ebene $\alpha\beta$ senkrechter Vector, so ist

$$\varrho = \beta + \mathrm{x}\gamma$$

die gesuchte Gleichung. Zur Ermittelung von γ wissen wir, dass γ mit α und $\mathrm{V}\alpha\beta$ eine rechte Ecke bildet, dass also $\gamma = \mathrm{x}.\alpha\mathrm{V}\alpha\beta$ ist.

Um die Länge des vom Endpunkt $\mathfrak{b}$ von β auf die Gerade

$$\varrho = \gamma + \mathrm{x}\alpha$$

gefällten Lothes zu finden, denken wir uns $\mathfrak{b}$ mit irgend einem Punkte $\mathfrak{m}$ der Geraden $\varrho = \gamma + \mathrm{x}\alpha$ verbunden. Dann ist der Vector $\mathfrak{b}\mathfrak{m}$

$$\delta = \gamma + \mathrm{x}\alpha - \beta.$$

Ist nun $\delta \perp$ zu α, so ist $\mathrm{S}\delta\alpha = 0$, daher

$$\mathrm{S}(\gamma + \mathrm{x}\alpha - \beta)\alpha = 0,$$

oder

$$\mathrm{x}\alpha^2 + \mathrm{S}(\gamma - \beta)\alpha = 0,$$

$$\mathrm{x}\alpha = -\alpha^{-1}\mathrm{S}(\gamma - \beta)\alpha,$$

folglich das Vector-Perpendikel

$$\delta = \gamma - \beta - \alpha^{-1}\mathrm{S}(\gamma - \beta)\alpha.$$

Um die wirkliche Länge, d. h. den Tensor von δ zu berechnen, bildet man $-\delta^2 = (\mathrm{T}\delta)^2$.

(IV.) Dass $\varrho = \alpha + \mathrm{x}\mathrm{V}\beta\gamma$ die Gleichung einer Geraden, die durch den Endpunkt von α und senkrecht zu zwei anderen Geraden geht, welche parallel zu β und γ sind, sieht man leicht daraus, dass $\mathrm{V}\beta\gamma$ einen Vector darstellt, der senkrecht zu β und γ ist.

(V.) Um den Vectorabstand δ der zwei einander kreuzenden Geraden

$$\varrho = \beta_1 + \mathrm{x}_1\alpha_1, \quad \varrho = \beta_2 + \mathrm{x}_2\alpha_2$$

zu finden, haben wir

$$\delta = \varrho_2 - \varrho_1 = \beta_2 - \beta_1 + \mathrm{x}_2\alpha_2 - \mathrm{x}_1\alpha_1,$$

wenn wir ϱ_1 und ϱ_2 die Vectoren nach den Enden von δ sein lassen. Dann ist

$$\mathrm{S}\delta\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{S}(\beta_2 - \beta_1)\alpha_1\alpha_2,$$

weil $\quad \mathrm{x}_1\mathrm{S}\alpha_1\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{x}_1\alpha_1^2\,\mathrm{S}\alpha_2 = 0,$

und ebenso $\quad \mathrm{x}_2\mathrm{S}\alpha_2\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{x}_2\alpha_2^2\mathrm{S}\alpha_1 = 0.$

Da aber δ senkrecht zu α_1 und α_2, so ist

$$\delta = \mathrm{x}\mathrm{V}\alpha_1\alpha_2.$$

Multipliciren wir auch diesen Ausdruck mit $\alpha_1\,\alpha_2$ und nehmen den Scalar, so ist

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\mathrm{x}\mathrm{V}\alpha_1\alpha_2 \,.\, \alpha_1\alpha_2 &= \mathrm{x}\mathrm{S}\,.\,\mathrm{V}\alpha_1\alpha_2\,(\mathrm{S}\alpha_1\alpha_2 + \mathrm{V}\alpha_1\alpha_2)\\ &= \mathrm{x}\mathrm{S}(\mathrm{V}\alpha_1\alpha_2)^2 = \mathrm{x}(\mathrm{V}\alpha_1\alpha_2)^2.\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit dem oben gefundenen Werthe von $\mathrm{S}\delta\alpha_1\alpha_2$ erhalten wir

$$\mathrm{x}(\mathrm{V}\alpha_1\alpha_2)^2 = \mathrm{S}(\beta_2 - \beta_1)\alpha_1\alpha_2;$$

daher ist

$$\delta = \mathrm{x}\mathrm{V}\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{S}(\beta_2 - \beta_1)\alpha_1\alpha_2 : \mathrm{V}\alpha_1\alpha_2.$$

Um die Endpunkte des kürzesten Abstandes δ zu ermitteln, operiren wir auf

$$\delta = \beta_2 - \beta_1 + \mathrm{x}_2\alpha_2 - \mathrm{x}_1\alpha_1 = \mathrm{x}\mathrm{V}\alpha_1\alpha_2,$$

worin x nun schon bekannt ist, mit $\mathrm{S}\,.\,\alpha_1$ und $\mathrm{S}\,.\,\alpha_2$ und erhalten dadurch zwei Gleichungen zur Bestimmung von x_1 und x_2.

(VI.) Die Gleichung einer Ebene, die durch den Anfang der Vectoren senkrecht zu α geht, ist $\mathrm{S}\alpha\varrho = 0$, weil das ϱ eines jeden Punktes der Ebene mit α einen rechten Winkel macht.

Geht die Ebene durch den Endpunkt von β und ist senkrecht zu α, so ist $\varrho - \beta$ ein Vector in dieser Ebene, daher senkrecht zu α, mithin ist

$$\mathrm{S}\alpha(\varrho - \beta) = 0$$

die Gleichung dieser Ebene.

(VII.) Die Gleichung einer Ebene, die durch das Ende von γ parallel zu den Geraden

$$\varrho = \alpha_1 + \mathrm{x}\beta_1, \quad \varrho = \alpha_2 + \mathrm{x}\beta_2$$

gelegt ist, lautet $\quad \mathrm{S}\beta_1\beta_2(\varrho - \gamma) = 0.$

Denn da die gegebenen Geraden den Vectoren β_1 und β_2 parallel gehen, so lassen sich von dem Ende von γ aus die Vectoren β_1 und β_2 in unsrer Ebene ziehen. Ausserdem ist $\varrho - \gamma$ ein dritter Vector dieser Ebene; daher gilt vorstehende Gleichung für jeden Punkt der Ebene.

(VIII.) Die Gleichung einer Ebene durch die Enden von α und β und senkrecht zur Ebene $S\delta\varrho = 0$ ist

$$S(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)\delta = 0,$$

oder

$$S\varrho(\alpha - \beta)\delta + S\alpha\beta\delta = 0,$$

weil $\varrho - \alpha$, $\alpha - \beta$ und δ drei Vectoren in oder doch parallel dieser Ebene sind.

(IX.) Die Gleichung der durch die Enden von α, β und γ gehenden Ebene ist

$$S(\varrho - \alpha)(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) = 0,$$

weil jede der vorstehenden Differenzen einen in dieser Ebene liegenden Vector darstellt. Die Gleichung lässt sich umformen in

$$S\varrho(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha) - S\alpha\beta\gamma = 0.$$

Da diese letzte Gleichung von der Form (vergl. VI.)

$$S\alpha(\varrho - \beta) = 0 \quad \text{oder} \quad S\alpha\varrho = C$$

ist, so stellt

$$\delta = \varkappa(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)$$

das Vector-Perpendikel von o aus auf die Ebene dar. Setzen wir δ in die Gleichung der Ebene statt ϱ ein, wodurch wir zur Bestimmung von $\varkappa$ gelangen, so ist

$$S\varkappa(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)^2 - S\alpha\beta\gamma = 0,$$

daher

$$\varkappa = S\alpha\beta\gamma(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)^{-2},$$

mithin

$$\delta = (V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha)^{-1} S\alpha\beta\gamma.$$

Da

$$-S\alpha\beta\gamma = 6\,\mathrm{Vol}(\mathfrak{o}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = 2 \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \cdot \delta,$$

so ist also $V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha$ gleich der negativen doppelten Basis $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ des Tetraeders.

Die drei an der Ecke o liegenden Seitenflächen des Tetraeders, dessen Kanten α, β und γ sind, haben zum Inhalt die Tensoren von

$$\tfrac{1}{2}V\alpha\beta, \quad \tfrac{1}{2}V\beta\gamma, \quad \tfrac{1}{2}V\gamma\alpha,$$

während die vierte Seite gleich dem Tensor der drei Werthe

$$\tfrac{1}{2}V(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha), \quad \tfrac{1}{2}V(\alpha - \beta)(\gamma - \beta), \quad \tfrac{1}{2}V(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)$$

ist. Letztere Ausdrücke ergeben entwickelt

$$-\tfrac{1}{2}(V\alpha\beta + V\beta\gamma + V\gamma\alpha).$$

Nimmt man daher nicht die Tensoren, so kann man vorstehende Ausdrücke die Dreiecksvectoren oder auch Vector-Dreiecke nennen. Die Summe dieser Flächenvectoren ist Null für das Tetraeder, wie für jedes andre Polyeder.

(X.) Der Vector-Abstand δ des Endpunktes von β von der Ebene, deren Gleichung $S\alpha(\varrho-\gamma)=0$ ist, hat den Werth

$$\delta = -\alpha^{-1} S\alpha(\beta-\gamma).$$

Denn denken wir uns von β ein Loth auf die Ebene gefällt, so ist dieses parallel zu α und der Vector seines Fusspunktes ist $\beta+x\alpha$, daher durch Einsetzen dieses Werthes in die Gleichung der Ebene

$$S\alpha(\beta+x\alpha-\gamma)=0,$$

oder

$$-x\alpha^2 = S\alpha(\beta-\gamma).$$

Mithin ist

$$\delta = x\alpha = -\alpha^{-1} S\alpha(\beta-\gamma).$$

6. — Die Kreislinie und die Kugelfläche.

(I.) Für beide Gebilde gilt die Gleichung

$$T\varrho = T\alpha,$$

wenn wir den Anfang der Vectoren in den Mittelpunkt legen. Aus dieser Gleichung ergeben sich leicht die unter (2), (3) und (4) in §. 53, 7 aufgeführten Ausdrücke. Um die anderen dort angegebenen Gleichungen zu bekommen, bilden wir

$$(\varrho+\alpha)(\varrho-\alpha) = \varrho^2+\alpha\varrho-\varrho\alpha-\alpha^2 = \alpha\varrho-\varrho\alpha$$
$$= 2V\alpha\varrho.$$

Operirt man auf diese Gleichuug mit den Zeichen S und T, so erhält man die Gleichungen (5) und (6), von denen die erste den Satz ausdrückt, dass die Sehnen von einem Punkte der Kugelfläche nach den Enden eines Durchmessers senkrecht zu einander sind, während (6) zeigt, dass das Rechteck aus diesen Sehnen gleich dem vierfachen Inhalte des Dreiecks mit den Seiten α und ϱ ist.

Um die Gleichung (7) zu erhalten, addiren wir zu $\varrho^2=\alpha^2$ beiderseits $\alpha\varrho$ und bekommen

$$\varrho^2+\alpha\varrho = \alpha^2+\alpha\varrho,$$

oder

$$(\varrho+\alpha)\varrho = \alpha(\alpha+\varrho),$$

mithin

$$\varrho = (\varrho+\alpha)^{-1}\alpha(\varrho+\alpha).$$

Diese Gleichung drückt aus, dass ϱ und α mit $\varrho+\alpha$ gleiche Winkel bilden (vergl. 1, IV, dieses Paragraphen), oder auch dass der Peripheriewinkel die Hälfte des zugehörigen Centriwinkels ist.

Die Gleichung (8) endlich ist ein Ausdruck für das Quadrat einer Sehne, mittelst ihrer Projection auf den Durchmesser.

Liegt der Anfang der Vectoren im Anfang des Durchmessers 2α einer Kugel, so ist $(\varrho-\alpha)^2=\alpha^2$ die Gleichung dieser krummen Fläche, die auch auf die Form $\varrho^2-2S\alpha\varrho=0$ gebracht werden kann, oder auf $S\varrho(\varrho-2\alpha)=0$.

Ist endlich der Mittelpunkt der Kugel im Endpunkt des Vectors β gelegen, so ist

$$T(\varrho-\beta) = T\alpha,$$

oder $$(\varrho - \beta)^2 = \alpha^2,$$

oder endlich $$\varrho^2 - 2\,S\varrho\beta = \alpha^2 - \beta^2 = c^2$$

die Gleichung der Kugelfläche. Durch Beschränkung der Punkte auf eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene stellen diese Gleichungen die Kreislinie dar.

Als Gleichung der Kugelfläche, welche durch die vier Punkte o, a, b, c geht, haben wir schon früher gefunden

$$\varrho^2 = \alpha^2 \operatorname{Cos}_1 \mathfrak{m} + \beta^2 \operatorname{Cos}_2 \mathfrak{m} + \gamma^2 \operatorname{Cos}_3 \mathfrak{m}.$$

(II.) Durch den Punkt a gehen Geraden; den Ort der Fusspunkte der Lothe zu finden, die von dem Anfangspunkte o der Vectoren auf diese Geraden gefällt werden.

Es sei $\varrho = \alpha + x\beta$ die Gleichung einer solchen durch a gehenden Geraden und δ das von o darauf gefällte Loth. Dann ist

$$\delta = \alpha + x\beta,$$

daher $$\delta^2 = \delta\alpha + x\delta\beta,$$

und $$S\delta^2 = S\delta\alpha,$$

oder $$\delta^2 - S\alpha\delta = S\delta(\delta - \alpha) = 0.$$

Diess ist die Gleichung einer Kreislinie oder einer Kugelfläche, worin δ der variable Vector und α der Durchmesser ist.

(III.) Den Ort der Punkte m zu finden, deren Abstände von o und a ein constantes Verhältniss haben.

Es sei $$\mathfrak{n} \,.\, o\mathfrak{m} = a\mathfrak{m},$$

oder $$\mathfrak{n}\,T\varrho = T(\varrho - \alpha),$$

mithin $$\mathfrak{n}^2\varrho^2 = (\varrho - \alpha)^2 = \varrho^2 - 2S\alpha\varrho + \alpha^2.$$

Dann ist $$\varrho^2(1 - \mathfrak{n}^2) - 2S\alpha\varrho = -\alpha^2,$$

und hieraus $$\left(\varrho - \frac{\alpha}{1-\mathfrak{n}^2}\right)^2 = \frac{\alpha^2\mathfrak{n}^2}{(1-\mathfrak{n}^2)^2},$$

oder $$T\left(\varrho - \frac{\alpha}{1-\mathfrak{n}^2}\right) = T\frac{\mathfrak{n}\alpha}{1-\mathfrak{n}^2}.$$

Diess ist aber die Gleichung einer Kugelfläche, deren Radius $T\mathfrak{n}\alpha\,(1-\mathfrak{n}^2)^{-1}$ ist, und deren Mittelpunkt auf α in dem Abstande $\alpha\,(1-\mathfrak{n}^2)^{-1}$ liegt.

(IV.) Aus der Gleichung der Kugelfläche $\varrho^2 = \alpha^2$ folgt für die zwei Punkte $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ derselben

$$\varrho_1^2 = \alpha^2, \quad \varrho_2^2 = \alpha^2,$$
$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = 0.$$

Mithin ist auch

$$S(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) = S(\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_2) = 0.$$

Nun ist $\varrho_1 + \varrho_2$ der den Winkel $\varrho_1\varrho_2$ halbirende Vector, $\varrho_1 - \varrho_2$ dagegen der Secantenvector durch die Endpunkte von ϱ_1 und ϱ_2. Aus der vorstehenden Gleichung folgt daher, dass diese Vectoren senkrecht zu ein-

ander sind, und da an der Grenze die Secante zur Tangente wird, so ist dieselbe senkrecht zum Radius des Berührungspunktes.

Mit Hilfe der Eigenschaft der Tangente, dass sie senkrecht zum Radius des Berührungspunktes ist, ergiebt sich leicht die Gleichung der Tangente in dem Punkte ϱ_1. Bezeichnen wir die Vectoren der Punkte der Tangente mit τ, so ist $\tau - \varrho_1$, ein Vector in der Tangente, daher senkrecht zu ϱ_1. Mithin ist

$$S\varrho_1 (\tau - \varrho_1) = 0$$

die Gleichung der Tangente, die sich auch

$$S\varrho_1 \tau = \varrho_1^2 = \alpha^2$$

schreiben lässt.

(V.) Für den Kreis die Gleichung der Berührungssehne (Polare) des Endpunktes des Vectors β zu finden.

Die Gleichung einer Tangente ist $S\tau\varrho = \alpha^2$. Da diese Tangente durch das Ende von β gehen soll, so ist $S\beta\varrho = \alpha^2$. Diese Gleichung ist nun richtig für die Radien ϱ_1 und ϱ_2 der Berührungspunkte der von β aus gezogenen Tangenten. Da sie aber, unter Voraussetzung eines variabeln ϱ, die Gleichung einer Geraden ist, so stellt sie die durch die Enden von ϱ_1 und ϱ_2 gehende Gerade, d. h. die Berührungssehne dar.

Nöthigenfalls kann man dieselbe schreiben $S\beta\sigma = \alpha^2$, um dem Irrthum vorzubeugen, als wären die variabeln Vectoren auf die Punkte des Kreises beschränkt.

(VI.) Zieht man durch den Endpunkt des Vectors γ Secanten an den Kreis und in den Schnittpunkten derselben mit dem Kreise Tangenten, so schneiden die correspondirenden Tangentenpaare einander in Punkten einer Geraden.

Es sei β der Vector des Schnittpunktes zweier solcher Tangenten, so ist die Gleichung der Berührungssehne des Schnittpunktes $S\beta\sigma = \alpha^2$. Da nun diese Berührungssehne nach der Voraussetzung durch den Endpunkt von γ geht, so ist auch

$$S\beta\gamma = \alpha^2.$$

In dieser Gleichung ist γ constant, β variabel, daher ist der Ort der Enden von β eine Gerade.

Die Richtigkeit der Umkehrung des Satzes lässt sich leicht nachweisen.

(VII.) Setzt man die Berührungsebene an die Kugelfläche als senkrecht auf dem Radius des Berührungspunktes voraus, so ergiebt sich leicht

$$S\tau\varrho_1 = \alpha^2$$

als Gleichung der Berührungsebene in dem Punkte der Kugelfläche, dessen Radius ϱ_1 ist.

Ebenso ist jetzt $S\beta\sigma = \alpha^2$ die Gleichung der Polarebene des Endpunktes von β.

7. — Die Gleichung der Kegelschnitte.

Den Ort der Punkte $\mathfrak{m}$ zu finden, für welche die Abstände von einer Geraden und von einem festen Punkte ein constantes Verhältniss haben.

Es sei $\alpha = \mathfrak{o}\mathfrak{a}$ der Abstand des festen Punktes von der festen Geraden (Directrix). Dann muss für einen Punkt $\mathfrak{m}$ des gesuchten Ortes sein

$$T\mathfrak{m}\mathfrak{o} = eT\mathfrak{m}\mathfrak{b},$$

wenn e das constante Verhältniss, $\mathfrak{m}\mathfrak{b}$ das Loth auf die Directrix bedeutet. Da aber $\mathfrak{m}\mathfrak{b}$ parallel zu α ist, so haben wir $\mathfrak{m}\mathfrak{b} = x\alpha$, daher

$$T\varrho = eT(x\alpha), \quad \text{oder} \quad \varrho^2 = e^2x^2\alpha^2.$$

Nun ist $\mathfrak{o}\mathfrak{b}$ auf zwei Arten ausdrückbar:

$$\mathfrak{o}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{b} = \varrho + x\alpha,$$
$$\mathfrak{o}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \alpha + y\delta,$$

wenn wir die Directrix parallel zu dem Vector δ annehmen.

Es ist daher

$$\varrho + x\alpha = \alpha + y\delta,$$
$$\alpha\varrho + x\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha y\delta,$$
$$S\alpha\varrho + x\alpha^2 = \alpha^2,$$

weil $S\alpha\delta = 0$, indem $\alpha \perp \delta$. Daher ist jetzt

$$x\alpha^2 = \alpha^2 - S\alpha\varrho,$$

und durch Einsetzen dieses Werthes von x in die Gleichung für ϱ^2

$$\alpha^2\varrho^2 = e^2(\alpha^2 - S\alpha\varrho)^2.$$

Diess ist eigentlich die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, deren Schnitt mit der Ebene $S\alpha\delta\varrho = 0$ den Kegelschnitt ergiebt.

Wie mit Benutzung dieser Gleichung Eigenschaften der Kegelschnitte ermittelt und mit Anwendung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$A\varrho^2 + \Sigma BS\alpha\varrho S\beta\varrho + CS\gamma\varrho = D$$

die Flächen zweiten Grades untersucht werden, findet man in den schon genannten Werken von Hamilton, Tait und Kelland.

§. 55. Die Differentiation der Quaternionen.

1. — Bei Aufsuchung der Gleichung der Tangente an ebene Curven (§. 44, 12) mussten wir Ausdrücke von der Form $\varrho = f(t)$ differentiiren. Die unabhängige Variable t war dabei ein Scalar, und die Rechnungen erfolgten in diesem Falle nach den bekannten Regeln der Differentialrechnung.

Dasselbe würde stattfinden, wenn uns etwa $q = f(t)$ gegeben wäre, d. h. eine Quaternion als Function eines Scalars, und wenn man dq finden sollte. Auch bei Abhängigkeit der Vectoren oder der Quaternionen von

mehreren Scalarvariabeln ergiebt sich keine Schwierigkeit für die Ableitung der Differentiale. Die in $f(t)$ oder $f(t, u)$ auftretenden Vectoren $\alpha, \beta \ldots$ werden dabei als Constanten behandelt.

Sobald aber die unabhängige Variable eine Quaternion oder ein Vector ist, so entstehen Schwierigkeiten für die Differentiation, herbeigeführt dadurch, dass für diese Variabeln das Princip der Vertauschbarkeit der Factoren nicht mehr allgemein gilt. Es kann nun auch, wie wir sehen werden, von einem Differentialcoefficienten oder Differentialquotienten nicht mehr die Rede sein, da aus $f(q)$ durch Differentiation kein Ausdruck von der Form $f'(q)\,dq$ entsteht, worin $f'(q)$ eine Function von q allein wäre. So ist z. B. für

$$p = f(q) = q^2,$$

$$dp = q \,.\, dq + dq \,.\, q,$$

und da hierin dq selbst eine von q ganz verschiedene Quaternion ist, so sind die beiden rechts stehenden Producte nicht einander gleich; es ist also auch dp nicht gleich $2q \,.\, dq$. Dies letzte Resultat wird nur erhalten, wenn q und dq complanar sind. Man sieht zugleich an diesem Beispiel, dass dq nicht in ein Product von dq und einem von dq freien Factor zerlegbar ist.

2. — Um das Differential von Functionen zu ermitteln, deren unabhängige Variable ein Vector oder eine Quaternion ist, sah sich Hamilton veranlasst, eine andre Definition für ein Differential zu Grunde zu legen, als die gegenwärtig für diesen Grenzwerth in der Analysis gebräuchliche. Er griff auf Newton zurück und definirte, wenn $p = F(q)$,

$$n^{-1}\,dp = F(q + n^{-1}\,dq) - F(q),$$

und daraus

$$dp = \lim n\,[F(q + n^{-1}\,dq) - F(q)],$$

wenn n sich der Grenze unendlich gross nähert. Diese Definition hat den Vorzug, dass sie auf dem Gebiete der Quaternionen zu brauchbaren Resultaten führt, während sie zugleich die Definition für die Differentiation von Scalarfunctionen in sich schliesst. Ist nämlich für Scalarvariabeln

$$y = F(x),$$

so ist nach der neuen Definition

$$dy = \lim n\,[F(x + n^{-1}\,x_1) - F(x)],$$

worin x_1 ein ganz beliebig grosser Zuwachs an x ist. Dann können wir setzen

$$dy = \lim \frac{F(x + n^{-1}\,x_1) - F(x)}{x_1 : n}\, x_1$$

$$= \lim \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta}\, x_1 = F'(x) \,.\, x_1 .$$

Hierin ist $F'(x)$ die erste Abgeleitete von $F(x)$; x_1 kann dagegen jeden beliebigen Werth haben. Bezeichnen wir x_1 in dieser Formel auch mit dx, so haben wir $dy = F'(x)\,dx$, wie in der gewöhnlichen Differential-

rechnung; nur sind jetzt dx und dy nicht nothwendig unendlich kleine Werthe, obschon sie es beide zugleich sein können. Es umfasst also die neue Definition von dy in der That die gebräuchliche.

Um zuerst an einem Beispiel die Anwendung der neuen Definition zur Ableitung des Differentials der Function von einer Quaternion zu zeigen, so sei

$$p = f(q) = q^2;$$

dann ist

$$\begin{aligned}\triangle p &= n\,[(q + n^{-1}\triangle q)^2 - q^2],\\ &= n\,[q^2 + n^{-1}\,q\,.\,\triangle q + n^{-1}\triangle q\,.\,q + n^{-2}(\triangle q)^2 - q^2],\\ &= q\,.\,\triangle q + \triangle q\,.\,q + n^{-1}\triangle q^2,\end{aligned}$$

mithin für $n = \infty$,

$$\triangle p = q\triangle q + \triangle q\,.\,q.$$

Schreiben wir nun mit Hamilton, um den gemachten Grenzübergang dadurch anzudeuten, d an Stelle des $\triangle$, so ist

$$dp = q\,.\,dq + dq\,.\,q,$$

ohne dass jedoch dp und dq nun nothwendig Quaternionen von unendlich kleiner Grösse bedeuten. Es kann dq eine unendlich kleine Quaternion sein, d. h. eine Quaternion, deren Tensor sich der Null nähert, sie braucht es aber nicht, und sie wird auch in den nun zu entwickelnden Formeln nicht als solche vorausgesetzt. Dann ist aber auch im Allgemeinen dp endlich.

Die Formel

$$d(q^2) = q\,.\,dq + dq\,.\,q$$

lässt sich noch umwandeln in

$$d(q^2) = 2S\,.\,qdq + 2Sq\,.\,Vdq + 2Sdq\,.\,Vq,$$

welcher Ausdruck, wenn q zu einem Vector ϱ wird, sich vereinfacht zu

$$d(\varrho^2) = 2S\varrho\,d\varrho.$$

3. — Ehe wir an die Herleitung der wichtigeren Differentialformeln gehen, wollen wir noch eine wesentliche Eigenschaft von

$$dp = \lim n\,[F(q + n^{-1}\,dq) - F(q)] = f(q, dq)$$

nachweisen, wenn wir mit f(q, dq) das Resultat der Differentiation von F(q) bezeichnen. Es ist f(q, dq) eine nach dq distributive Function, d. h. es ist

$$f(q, r + s) = f(q, r) + f(q, s).$$

Denn wir haben

$$\begin{aligned}f(q, r + s) &= \lim n\,[F(q + n^{-1}\,r + n^{-1}\,s) - F(q)]\\ &= \lim n\,[F(q + n^{-1}\,r + n^{-1}\,s) - F(q + n^{-1}\,s) + F(q + n^{-1}\,s) - F(q)]\\ &= \lim n\,[F(q + n^{-1}\,s + n^{-1}\,r) - F(q + n^{-1}\,s)]\\ &\quad + \lim n\,[F(q + n^{-1}\,s) - F(q)]\\ &= f(q, r) + f(q, s).\end{aligned}$$

Ein besonderer Fall vorstehender Formel ist

$$f(q, xr) = f(q, r + r + \ldots + r) = xf(q, r).$$

Stellt man durch Definition fest, dass

$$dF(q, r, s \ldots) = \operatorname{Lim} n\,[F(q + n^{-1}\triangle q, r + n^{-1}\triangle r, \ldots) - F(q, r, s \ldots)],$$

worin $q, r, s \ldots \triangle q, \triangle r, \triangle s \ldots$ ganz willkürliche Quaternionen sind, so können wir wieder setzen

$$dF(q, r, s \ldots) = f(q, r, s, \ldots dq, dr, ds \ldots),$$

wobei f eine nach $dq, dr, ds \ldots$ lineäre und homogene Function ist, die man erhält, indem man F nach q, r, s einzeln differentiirt und die Summe der erhaltenen partiellen Differentiale bildet. Es ist mit anderen Worten $f(q, r, s, dq, dr \ldots)$ distributiv nach dq, dr, ds. Hat man daher ein Product oder eine Potenz von Quaternionen zu differentiiren, so muss man nach jedem Factor einzeln differentiiren und die erhaltenen Resultate addiren; und zwar wird, abweichend vom gewöhnlichen Verfahren, jeder Factor an seiner Stelle differentiirt. So ist z. B.

$$d(qrs) = dq \,.\, rs + q \,.\, dr \,.\, s + qr \,.\, ds,$$

$$d(q^m) = dq \,.\, q^{m-1} + q\,dq \,.\, q^{m-2} + q^2 dq \,.\, q^{m-3} + \ldots + q^{m-1}\,dq,$$

Resultate, welche in die Ergebnisse der gewöhnlichen Differentialrechnung übergehen, sobald die Quaternionen complanar sind, indem dann die Factoren vertauschbar werden.

4. — Wie ein Kunstgriff oft rascher zum Resultate der Differentiation führt, als die Anwendung der Grundformel, möge uns die Aufsuchung des Differentials von $p = q^{-1}$ zeigen. Nach der Definition ist

$$\begin{aligned} dp &= \lim n\,[(q + n^{-1}\triangle q)^{-1} - q^{-1}] \\ &= \lim n\,(q + n^{-1}\triangle q)^{-1}\,[q - (q + n^{-1}\triangle q)]\,q^{-1} \\ &= \lim -n(q + n^{-1}\triangle q)^{-1} \,.\, n^{-1}\triangle q \,.\, q^{-1} = -q^{-1}\,dq \,.\, q^{-1}. \end{aligned}$$

Leitet man dagegen aus $qq^{-1} = 1$ das Differential

$$dq \,.\, q^{-1} + q\,dq^{-1} = 0$$

ab, so ergiebt sich aus diesem Ausdruck sofort

$$dq^{-1} = -q^{-1}\,dq \,.\, q^{-1},$$

welches für complanare Quaternionen zu $dq^{-1} = -q^{-2}\,dq$ wird.

5. — Für die Differentiation der Functionen von Quaternionen ergeben sich nun folgende Gesetze. Es ist

(I.) $dc = 0$; (II.) $dcf(q) = cdf(q)$; (III.) $d[f(q) \,.\, c] = df(q) \,.\, c$;

(IV.) $d[F_1(q) + F_2(q) + F_3(q) + \ldots] = dF_1(q) + dF_2(q) + dF_3(q) + \ldots$

(V.) $d[\varphi(q)\,\psi(q)] = d\varphi(q) \,.\, \psi(q) + \varphi(q)\,d\psi(q)$;

(VI.) $$\begin{aligned} dq^{-m} &= d(q^{-1}) \,.\, q^{-m+1} + q^{-1} \,.\, d(q^{-1}) \,.\, q^{-m+2} + \ldots + q^{-m+1} \,.\, d(q^{-1}) \\ &= -q^{-1}\,dq \,.\, q^{-m} - q^{-2}\,dq \,.\, q^{-m+1} + \ldots - q^{-m}\,dq \,.\, q^{-1}, \end{aligned}$$

wenn m eine ganze positive Zahl ist.

Ist eine Potenz mit gebrochenem Exponenten zu differentiiren, so ergeben sich Schwierigkeiten. Um z. B. $\mathrm{d}\sqrt{q}$ zu finden, setzen wir $p^2 = q$, dann ist

$$\mathrm{d}q = p \,.\, \mathrm{d}p + \mathrm{d}p \,.\, p.$$

Um diese Gleichung nach $\mathrm{d}p$ aufzulösen, multiplicirt man sie mit p und in Kp und addirt die Producte. Dadurch bekommt man

$$p\,\mathrm{d}q + \mathrm{d}q \,.\, Kp = (p^2 + 2pSp + Tp^2)\,\mathrm{d}p,$$

woraus sich nun leicht $\mathrm{d}p = \mathrm{d}\sqrt{q}$ ergiebt, ausgedrückt in $\sqrt{q}$ und $\mathrm{d}q$. Vorstehende Ableitung rührt von Hamilton her. Aus derselben geht hervor, dass zur Auffindung des Differentials einer Wurzel aus einer Quaternion die Lösung einer Quaternionengleichung nöthig ist, eine Aufgabe, die wegen der Nichtvertauschbarkeit der Factoren rasch zu grossen Schwierigkeiten führt, wie der nächste Paragraph noch zeigen wird.

Sind q und $\mathrm{d}q$ complanare Functionen, so erfolgt die Differentiation nach den Regeln der Analysis. So ist, wenn α ein Einheitsvector,

$$\alpha^t = \cos {}^1\!/_2\pi\, t + \alpha \,.\, \sin {}^1\!/_2\pi\, t,$$

daher

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha^t &= (-\,{}^1\!/_2\pi \,.\, \sin {}^1\!/_2\pi\, t + {}^1\!/_2\pi\,\alpha \,.\, \cos {}^1\!/_2\pi\, t)\,\mathrm{d}t \\ &= {}^1\!/_2\pi\,[\cos {}^1\!/_2\pi\,(t+1) + \alpha \sin {}^1\!/_2\pi\,(t+1)]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Um daher $\mathrm{d}\alpha^t$ zu finden, wenn α kein Einheitsvector, haben wir

$$\mathrm{d}\alpha^t = \mathrm{d}(T\alpha)^t \,.\, (U\alpha)^t = (T\alpha)^t \,.\, l(T\alpha) \,.\, (U\alpha)^t + (T\alpha)^t \,.\, \mathrm{d}(U\alpha)^t,$$

wobei $(T\alpha)^t$ als Scalar differentiirt wurde; da ferner

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(U\alpha)^t &= {}^1\!/_2\pi\,[\cos {}^1\!/_2\pi\,(t+1) + U\alpha \sin {}^1\!/_2\pi\,(t+1)]\,\mathrm{d}t \\ &= {}^1\!/_2\pi\,(U\alpha)^{t+1}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

so ist

$$\mathrm{d}\alpha^t = (l T\alpha + {}^1\!/_2\pi\, U\alpha)\,\alpha^t \,.\, \mathrm{d}t.$$

6. — Differentiation von Ausdrücken, worin

$$Sq,\ Vq,\ Kq,\ Tq,\ Uq$$

vorkommen.

(I.) Da Differentiiren eine distributive Operation ist, so haben wir

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}(Sq + Vq) = \mathrm{d}Sq + \mathrm{d}Vq.$$

Da aber auch

$$\mathrm{d}q = S\,\mathrm{d}q + V\,\mathrm{d}q,$$

so erhalten wir durch Vergleichung

$$\mathrm{d}Sq = S\,\mathrm{d}q \quad \text{und} \quad \mathrm{d}Vq = V\,\mathrm{d}q.$$

(II.) Da ferner $Kq = Sq - Vq$ ist, so haben wir

$$\mathrm{d}Kq = \mathrm{d}(Sq - Vq) = \mathrm{d}Sq - \mathrm{d}Vq = S\,\mathrm{d}q - V\,\mathrm{d}q = K\,\mathrm{d}q.$$

(III.) Um $\mathrm{d}Tq$ zu finden, setzen wir

$$(Tq)^2 = qKq;$$

und da Tq ein Scalar ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}2Tq \,.\, \mathrm{d}Tq &= \mathrm{d}q\,Kq = \lim n\,[(q + n^{-1}\,\mathrm{d}q) \,.\, K(q + n^{-1}\,\mathrm{d}q) - qKq] \\ &= \lim n\,[n^{-1} \,.\, (q\,K\,\mathrm{d}q + \mathrm{d}q \,.\, Kq) + n^{-2}\,\mathrm{d}q \,.\, K\,\mathrm{d}q] \\ &= q\,K\,\mathrm{d}q + \mathrm{d}q \,.\, Kq = q\,K\,\mathrm{d}q + K(q\,K\,\mathrm{d}q) \\ &= 2S(q\,K\,\mathrm{d}q) = 2S(Kq \,.\, \mathrm{d}q),\end{aligned}$$

ein Resultat, das sich auch direct aus $dq\,Kq = dq\,.\,Kq + q\,.\,dKq$ finden lässt. Daher bekommen wir

$$dTq = \frac{S(Kq\,.\,dq)}{Tq} = S(KUq\,.\,dq) = S(Uq^{-1}\,.\,dq),$$

oder

$$\frac{dTq}{Tq} = S\frac{dq}{q}, \quad \text{und} \quad \frac{dT\varrho}{T\varrho} = S\frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Das letzte Resultat kann man auch direct aus $(T\varrho)^2 = -\varrho^2$ ableiten.

(IV.) Aus $q = Tq\,.\,Uq$ ergiebt sich

$$dq = Tq\,.\,dUq + dTq\,.\,Uq,$$

also

$$\frac{dq}{q} = \frac{dUq}{Uq} + \frac{dTq}{Tq} = \frac{dUq}{Uq} + S\frac{dq}{q},$$

und hieraus

$$\frac{dq}{q} - S\frac{dq}{q} = \frac{dUq}{Uq}.$$

Da die linke Seite aber $V\frac{dq}{q}$ ist, so haben wir

$$V\frac{dq}{q} = \frac{dUq}{Uq}, \quad \text{und} \quad V\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dU\varrho}{U\varrho},$$

welches letzte Resultat sich auch direct aus $\varrho = T\varrho\,.\,U\varrho$ hätte finden lassen.

7. — Differentiation von Ausdrücken, worin Combinationen von U, V, S, T vorkommen.

Mit Benutzung des letzten Satzes in (6) können wir setzen

(I.)
$$\frac{dUVq}{UVq} = V\frac{Vdq}{Vq}.$$

Sind daher dq und q complanar, so ist dieser Ausdruck gleich Null. Es ist ferner

(II.)
$$dVUq = VdUq = V\left(V\frac{dq}{q}\,.\,Uq\right);$$

(III.)
$$dSUq = SdUq = S\left(V\frac{dq}{q}\,.\,Uq\right);$$

(IV.)
$$dTVUq = TVUq\,.\,S\frac{dVUq}{VUq} = S\frac{VdUq}{VUq}\,.\,TVUq$$
$$= S\frac{VdUq}{UVUq} = S\frac{V(dq:q)\,.\,Uq}{UVq}$$
$$= S\left(V\frac{dq}{q}\,\frac{Uq}{UVq}\right) = S\frac{dUq}{UVq}.$$

8. — Mit Berücksichtigung der im Vorstehenden gegebenen Regeln und Formeln hat nun auch die Bildung höherer Differentiale keine Schwierigkeit. So ist z. B.

$$d^2(q^2) = d(dq\,.\,q + qdq) = d^2q\,.\,q + 2(dq)^2 + qd^2q,$$
$$d^2(\varrho^2) = d\,2S\varrho d\varrho = 2(d\varrho)^2 + 2S\varrho d^2\varrho.$$

Ist das erste Differential von q constant, so vereinfachen sich die höheren Differentiale der davon abhängigen Variabeln, und Hamilton hat gezeigt, dass dann auch der Taylor'sche Satz gilt in der Form

$$f(q + x\,dq) = f(q) + x\,df(q) + \frac{x^2}{1.2} d^2 f(q) + \text{etc.}$$

Die Differentiation der Functionen von Functionen einer variabeln Quaternion bietet keine neuen Schwierigkeiten. Man verfährt dabei unter Beachtung der im Vorstehenden gegebenen Regeln entsprechend wie bei Functionen von Functionen mit Scalarvariabeln.

9. — Um an einigen Beispielen die Verwendung der Differentialrechnung zu zeigen, so sei der kürzeste Abstand des Endpunktes von β von der Geraden $\varrho = \gamma + x\alpha$ zu finden.

Es ist der Abstand δ des Endpunktes b von irgend einem Punkte m der gegebenen Geraden ausgedrückt durch

$$\delta = \gamma + x\alpha - \beta.$$

Damit dieser Abstand ein Minimum wird, muss

$$dT\delta = dT(\gamma + x\alpha - \beta)$$

gleich Null sein. Es ist aber

$$dT\delta = T\delta \,.\, S(\delta^{-1} d\delta) = -S(U\delta \,.\, d\delta) = -S \,.\, (U\delta \,.\, \alpha\, dx).$$

Daher muss $S(U\delta \,.\, \alpha) = 0$, oder δ senkrecht auf α sein. Es ist daher auch

$$S\alpha(\gamma + x\alpha - \beta) = x\alpha^2 + S\alpha(\gamma - \beta) = 0,$$

woraus man die in §. 54, 5, III. gefundene Länge des Perpendikels wieder herleiten kann.

Um den kürzesten Abstand zweier kreuzenden Geraden $\varrho_1 = \beta_1 + x_1\alpha_1$ und $\varrho_2 = \beta_2 + x_2\alpha_2$ zu finden, setzen wir den Abstand δ zweier Punkte derselben gleich $\varrho_2 - \varrho_1$. Dann muss wieder

$$dT\delta = dT(\varrho_2 - \varrho_1) = S\,\frac{d(\varrho_2 - \varrho_1)}{\varrho_2 - \varrho_1}$$
$$= S(\varrho_2 - \varrho_1)\,(d\varrho_2 - d\varrho_1) : (\varrho_2 - \varrho_1)^2 = 0$$

sein, oder

$$S(\varrho_2 - \varrho_1)\,(\alpha_2\,dx_2 - \alpha_1\,dx_1) = 0.$$

Da aber x_1 und x_2 unabhängig von einander sind, so zerfällt diese Gleichung in

$$S\alpha_1(\varrho_2 - \varrho_1) = 0, \quad S\alpha_2(\varrho_2 - \varrho_1) = 0,$$

woraus folgt, dass δ senkrecht ist zu den Geraden α_1 und α_2 und mithin parallel zu $V\alpha_1\alpha_2$.

Es ist daher

$$\delta = \varrho_2 - \varrho_1 = \beta_2 + x_2\alpha_2 - \beta_1 - x_1\alpha_1 = xV\alpha_1\alpha_2.$$

Die weitere Entwickelung findet sich §. 54, 5, V.

10. — Ist ϱ der Vector des Punktes einer Curve und ausgedrückt durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho = f(t),$$

wobei in $f(t)$ neben dem Scalar t zwei oder drei constante Vectoren α, β, γ vorkommen, je nachdem die Curve eine ebene oder eine doppelt gekrümmte ist, so ist

$$d\varrho = \lim n\,[f(t + n^{-1}\,dt) - f(t)]$$

ein Vector in der Richtung der Tangente in dem Punkte der Curve, welcher durch den Werth t bestimmt ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich leicht. Ist nämlich

$$om = \varrho = f(t)$$
$$om_1 = \varrho_1 = f(t + n^{-1}\,dt),$$

wobei dt ein beliebiger Scalar ist, so haben wir für die Sehne $m\,m_1$ gleich σ

$$\sigma = om_1 - om = \varrho_1 - \varrho = f(t + n^{-1}\,dt) - f(t).$$

Diess ist ein Vector in der Richtung der Secante $m\,m_1$. Und es ist auch das n fache dieses Werthes ein Vector in derselben Richtung, daher an der Grenze ein Vector in der Richtung der Tangente. Bezeichnen wir diesen Vector mit $d\varrho$, so ist

$$d\varrho = f'(t)\,.\,dt,$$

wo, wie wir in (2.) dieses Paragraph nachgewiesen, nun weder $d\varrho$ noch dt unendlich kleine Werthe bedeuten müssen, obschon sie es sein können. Es ist dt vielmehr ein beliebiger Scalar und daher

$$d\varrho : dt = \varrho' = f'(t)$$

ein neuer Vector, der parallel zu der Tangente der Curve von dem Anfang o aus gezogen gedacht werden kann. Dann bilden die Enden dieser Vectoren ϱ' wieder eine neue Curve. Stellt nun t die Zeit dar, die bei Beschreibung der Curve durch einen Punkt von einem gewissen Momente an verfliesst, so ist $d\varrho : dt$ gleich der Geschwindigkeit v. Denn falls dt unendlich klein ist, so ist $d\varrho = ds$ und $v = ds : dt$. In dem Ausdrucke

$$d\varrho : dt = f'(t)$$

wird aber nichts geändert, wenn dt nicht unendlich klein ist, da $d\varrho$ in demselben Verhältniss zunimmt wie dt. Es ist also ganz allgemein $d\varrho : dt = v$. Daher stellt $\varrho' = d\varrho : dt$ die Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung dar, und es ist $\varrho' = f'(t)$ die Gleichung der Geschwindigkeitscurve oder des Hodographen von Hamilton.

Da die Acceleration der Zuwachs an Geschwindigkeit ist, der in der Zeiteinheit nach Grösse und Richtung zu der vorhandenen Geschwindigkeit hinzukommt, so ist, wenn

$$\varrho' = f'(t)$$

die Gleichung des Hodographen darstellt,

$$\frac{d\varrho'}{dt} = \varrho'' = f''(t),$$

dieser Zuwachs in der Zeiteinheit, daher $\varrho'' = f''(t)$ die Vector-Acceleration, d. h. die Acceleration nach Grösse und Richtung. Da man setzen kann

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{\varrho}\, v,$$

wenn hier einmal $\dot{\varrho}$ die Abgeleitete von ϱ nach s ist, so ergiebt eine zweite Differentiation

$$\varrho'' = \frac{dv}{dt} \cdot \dot{\varrho} + v \cdot \frac{d\dot{\varrho}}{dt} = v' \cdot \dot{\varrho} + v \cdot \frac{d\dot{\varrho}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$
$$= v'\dot{\varrho} + v^2 \ddot{\varrho}.$$

Diese Gleichung sagt aber, dass die Vector-Acceleration der Bewegung zerlegbar ist in eine Componente längs der Tangente, deren Grösse $\frac{dv}{dt}$, d. h. gleich der Tangentialacceleration ist, und in eine zweite längs der Normalen, deren Grösse v^2 dividirt durch den Krümmungsradius ist. Wir werden nämlich sogleich zeigen, dass $\dot{\varrho} = d\varrho : ds$ ein Einheitsvector in der Richtung der Tangente, dagegen $\ddot{\varrho} = d^2\varrho : ds^2$ ein Vector in der Richtung der Normalen, dessen Grösse gleich dem reciproken Werthe des Krümmungsradius der Curve ist.

In der Gleichung einer Curve $\varrho = f(t)$ ist die Variable t eine ganz willkürliche veränderliche Grösse. Lassen wir dieselbe einmal den von irgend einem Punkt der Curve aus gerechneten Bogen s der Curve sein, so dass wir haben

$$\varrho = \varphi(s),$$

dann ist $$d\varrho = \varphi'(s)\, ds,$$

und $$d\varrho : ds = \varphi'(s).$$

Dieser Quotient ist ein Vector in der Richtung der Tangente, dessen Länge gleich eins ist. Diese letztere Eigenschaft folgt daraus, dass für unendlich kleine Aenderungen von ϱ und s, die Differentiale $d\varrho$ und ds identisch, also $d\varrho : ds$ für diesen Fall gleich eins ist. Da aber für endliche Werthe von ds der Werth $d\varrho$ proportional dem ds gewachsen ist, indem $\varphi'(s)$ dasselbe bleibt, so ist ganz allgemein $T\varphi'(s) = 1$, und $\varphi'(s)$ also ein Einheitsvector in der Richtung der Tangente

In dem Punkte $s + \delta s$ ist dieser Einheitsvector

$$\varphi'(s + \delta s) = \varphi'(s) + \varphi''(s + \vartheta \delta s) \cdot \delta s.$$

Daher ist

$$\varphi'(s)\, \varphi'(s + \delta s) = \varphi'(s)^2 + \varphi'(s) \cdot \varphi''(s + \vartheta\, \delta s)\, \delta s$$

und

$$S\varphi'(s) \cdot \varphi'(s + \delta s) = S\varphi'(s)^2 + S\varphi'(s) \cdot \varphi''(s + \vartheta \delta s)\, \delta s,$$

woraus folgt, da $T\varphi'(s) = 1$ ist,

$$S\varphi'(s)\, \varphi''(s) = 0.$$

Es ist also $\varphi''(s)$ ein zu $\varphi'(s)$ d. h. zur Tangente senkrechter Vector.

Lassen wir $\delta\zeta$ den Winkel zwischen den Einheitstangenten $\varphi'(s)$ und $\varphi'(s+\delta s)$ sein, oder den Bogen, der die Enden dieser Einheitsvectoren verbindet, so ist

$$\begin{aligned}\delta\zeta &= \varphi'(s+\delta s) - \varphi'(s),\\ &= \varphi'(s) + \varphi''(s+\vartheta\delta s)\,\delta s - \varphi' s = \varphi''(s+\vartheta\delta s)\,.\,\delta s.\end{aligned}$$

Daher ist

$$\delta\zeta : \delta s = \varphi''(s+\vartheta\delta s),$$

welcher Werth an der Grenze zu $\varphi''(s)$ wird. Nun ist aber $\lim \delta s : \delta\zeta$ gleich dem Krümmungsradius R, daher ist $T\varphi''(s)$ der reciproke Werth von R. Nennen wir p den Krümmungsmittelpunkt für den Curvenpunkt m, so ist also

$$pm = [\varphi''(s)]^{-1};$$

daher haben wir in

$$\varrho = op = om - pm = \varphi(s) - [\varphi''(s)]^{-1}$$

die Gleichung für den Ort der Krümmungsmittelpunkte oder der Evolute.

Wir wollen für die Parabel die Gleichung der Evolute herleiten. Die Gleichung der Parabel ist

$$\begin{aligned}\varrho &= \alpha t + {}^1/_2\,\beta t^2,\\ d\varrho &= (\alpha+\beta t)\,dt,\\ ds &= T(\alpha+\beta t)\,.\,dt = \sqrt{-\alpha^2-\beta^2 t^2}\,dt,\end{aligned}$$

wenn α senkrecht zu β oder $S\alpha\beta = 0$ ist. Hieraus lässt sich durch Integration ein Ausdruck von s in t finden.

Es ist ferner

$$\frac{d\varrho}{ds} = (\alpha+\beta t)\frac{dt}{ds},$$

$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} = (\alpha+\beta t)\frac{d^2t}{ds^2} + \beta\left(\frac{dt}{ds}\right)^2.$$

Aus $dt : ds = [T(\alpha+\beta t)]^{-1}$ ergiebt sich aber

$$\begin{aligned}\frac{d^2t}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\,[T(\alpha+\beta t)]^{-1} = -\frac{dT(\alpha+\beta t)}{T(\alpha+\beta t)^2}\,\frac{dt}{ds},\\ &= \frac{-T(\alpha+\beta t)\;S[\beta : (\alpha+\beta t)]}{T(\alpha+\beta t)^2}\,\frac{dt}{ds},\\ &= \frac{S\beta(\alpha+\beta t)}{[T(\alpha+\beta t)]^3}\,\frac{dt}{ds}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varrho}{ds^2} &= (\alpha+\beta t)\,\frac{S\beta(\alpha+\beta t)}{T(\alpha+\beta t)^4} + \frac{\beta}{T(\alpha+\beta t)^2}\\ &= \frac{(\alpha+\beta t)\;S\beta(\alpha+\beta t) - \beta(\alpha+\beta t)^2}{T(\alpha+\beta t)^4},\end{aligned}$$

wobei wir $-(\alpha+\beta t)^2 = T(\alpha+\beta t)^2$ gesetzt haben.

Hieraus ergiebt sich endlich

$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} = \frac{-(\alpha+\beta t)\,V\alpha\beta}{[T(\alpha+\beta t)]^4}.$$

Daher haben wir für den Vector des Krümmungsmittelpunktes

$$op = \alpha t + {}^1/_2\beta t^2 + \frac{[T(\alpha+\beta t)]^4}{(\alpha+\beta t)\,V\alpha\beta}.$$

Für $(\alpha+\beta t)V\alpha\beta$ kann man setzen

$$(\alpha+\beta t)\,\alpha\beta = \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 t,$$

da $S\alpha\beta = 0$ ist. Führt man dies in vorstehende Gleichung ein, setzt auch

$$[T(\alpha+\beta t)]^4 = \left([T(\alpha+\beta t)]^2\right)^2 = (\alpha^2+\beta^2 t^2)^2,$$

so findet man durch Reduction auf gemeinschaftlichen Nenner und durch Ausführung der Division

$$op = -t^3\beta^2\alpha^{-1} + ({}^3/_2 t^2 + \alpha^2\beta^{-2})\,\beta$$

als Vector des Krümmungsmittelpunktes und damit

$$\varrho = -t^3\beta^2\alpha^{-1} + ({}^3/_2 t^2 + \alpha^2\beta^{-2})\,\beta$$

als Gleichung der Parabelevolute.

Ist uns für eine Curve oder Fläche eine Gleichung von der Form

$$F(\varrho) = C$$

gegeben, so erhalten wir durch Differentiation daraus eine Gleichung von der Form $f(\varrho, d\varrho) = 0$.

Ist nun die ursprüngliche Gleichung eine Scalargleichung, wie diess häufig der Fall, so ist auch $f(\varrho, d\varrho)$ eine Scalargleichung, die nach $d\varrho$ lineär und homogen ist, und die sich daher schreiben lässt

$$S(\nu\, d\varrho) = 0.$$

Hierin ist ν eine Function von ϱ; dagegen $d\varrho$ eine Tangente an die Curve oder Fläche. Daher drückt vorstehende Gleichung aus, dass ν senkrecht zu $d\varrho$, also in der Richtung der Normalen des Berührungspunktes liegt. So folgt z. B. aus der Gleichung der Kreislinie oder der Kugelfläche

$$T\varrho = T\alpha,$$

oder $$\varrho^2 = \alpha^2,$$

daher $$d\varrho^2 = \varrho\, d\varrho = 0,$$

also auch $S\varrho\, d\varrho = 0$. Daher ist hier ϱ senkrecht zur Berührenden, die bekannte Eigenschaft der Kreislinie und der Kugelfläche.

Aus der Gleichung der Ellipse

$$\alpha^2\varrho^2 + (S\alpha\varrho)^2 = -a^2b^2$$

folgt durch Differentiation

$$[\alpha^2\varrho + \alpha S(\alpha\varrho)]\,d\varrho = 0.$$

Daher ist $\alpha^2\varrho + \alpha S\alpha\varrho$ ein Vector in der Richtung der Normalen, daher

$$\sigma = \varrho + x(\alpha^2\varrho + \alpha S\alpha\varrho)$$

die Gleichuug der Normalen der Ellipse in dem Endpunkte von ϱ.

11. — Wir geben zum Schluss die Lösung einiger Bewegungsaufgaben.

(I.) Ein Punkt steht unter dem Einfluss einer nach Grösse und Richtung constanten Acceleration; man soll die Bahn des Punktes bestimmen. — Es sei

$$\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{dt^2} = \alpha,$$

so ist der Hodograph eine Gerade, denn aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich

$$\varrho' = \alpha t + \beta.$$

Durch nochmalige Integration erhalten wir

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t,$$

wenn wir die Integrationsconstante gleich Null setzen. Die Bahn des Punktes ist also eine Parabel.

(II.) Die auf einen Punkt wirkende Acceleration hat die Grösse p und ist fortwährend nach dem festen Punkte o gerichtet. Man soll die Bahn des bewegten Punktes finden. Wir haben jetzt

$$\varrho'' = p\,U\varrho.$$

Operirt man auf diese Gleichung mit $V.\varrho$, so erhält man

$$V(\varrho\varrho'') = pV(\varrho\,U\varrho) = pT\varrho\,.\,V(U\varrho)^2 = 0.$$

Aus $V.\varrho\varrho'' = 0$ folgt durch Integration

$$V.\varrho\varrho' = \gamma,$$

wobei γ ein constanter Vector ist. Von der Richtigkeit der vorstehenden Gleichung überzeugt man sich leicht durch Differentiation. Aus $V\varrho\varrho' = \gamma$ folgt, das ϱ und ϱ' in einer Ebene senkrecht zu γ liegen. Daher ist die Bahn eine ebene Curve; und da $V\varrho\varrho'$ dem Inhalte des Dreiecks mit den Seiten ϱ und ϱ' proportional ist, so ist dieser Inhalt constant. Damit ist aber das Princip der Flächen bewiesen für Accelerationen, die nach oder von einem festen Punkte aus wirken. Eine einfachere Herleitung dieses wichtigen Satzes ist kaum möglich.

(III.) Ist die Grösse der nach einem festen Punkte gerichteten Acceleration dem Quadrate des Abstandes des beweglichen Punktes vom Centrum umgekehrt proportional, so dass also

$$p = c : T\varrho^2,$$

wobei c ein Scalar ist, so haben wir

$$\varrho'' = c\,U\varrho : T\varrho^2.$$

Nun ist nach 6, IV. dieses Paragraphen

$$dU\varrho = U\varrho V\frac{d\varrho}{\varrho} = U\varrho\,.\,V\frac{\varrho\,d\varrho}{\varrho^2} = -\frac{U\varrho\,V\varrho\,d\varrho}{T\varrho^2}.$$

Daher ist

$$\frac{dU\varrho}{dt} = -\frac{U\varrho\,V\varrho\varrho'}{T\varrho^2} = -\frac{U\varrho\,.\,\gamma}{T\varrho^2}.$$

Durch Einsetzen des Werthes von $U\varrho$ in den obigen Ausdruck für ϱ'' erhalten wir

$$\varrho''.\gamma = -c\frac{dU\varrho}{dt},$$

und hieraus $$\varrho'\gamma = \eta - cU\varrho.$$

In dieser Gleichung ist η ein Vector, der senkrecht auf γ steht. Denn ϱ und ϱ' sind senkrecht zu γ, mithin ist $\varrho'\gamma$ selbst ein zu γ senkrechter Vector. Da nun $U\varrho$ schon senkrecht zu γ ist, so muss auch η senkrecht zu γ sein.

Die Gleichung des Hodographen ist

$$\varrho' = \eta\gamma^{-1} - cU\varrho\,\gamma^{-1}.$$

Da hierin die beiden Glieder der rechten Seite Vectoren von constanter Länge sind, und da der erste auch constante Richtung hat, so ist der Hodograph eine Kreislinie.

Um dle Gleichung der Bahn zu finden, operiren wir mit $V.\varrho$ auf die Gleichung des Hodographen. Es ist

$$V\varrho\varrho' = \gamma = V.\varrho\eta\gamma^{-1} - cV.\varrho U\varrho\gamma^{-1},$$
$$\gamma = V.\varrho\eta\gamma^{-1} + cT\varrho.\gamma^{-1}.$$

Hieraus folgt

$$\gamma^2 = (V\varrho\eta\gamma^{-1})\gamma + cT\varrho = S\eta\varrho + cT\varrho.$$

Es ist nämlich

$$V.\varrho\eta\gamma^{-1} = V[(S\varrho\eta + V\varrho\eta)\gamma^{-1}]$$
$$= V.(S\varrho\eta)\gamma^{-1} + V.(V\varrho\eta)\gamma^{-1}$$
$$= S(\varrho\eta).\gamma^{-1},$$

weil ϱ und η senkrecht auf γ sind, $V\varrho\eta$ daher in die Richtung von γ fällt, daher $V.(V\varrho\gamma)\gamma^{-1}$ gleich Null ist.

Die erlangte Bahngleichung lässt sich schreiben

$$cT\varrho = \gamma^2 - S\eta\varrho,$$

und zeigt durch ihre Aehnlichkeit mit der in §. 54, 7 gegebenen Gleichung der Kegelschnitte, dass der Punkt sich in einer Curve zweiter Ordnung bewegt.

§. 56. Lösung von Quaternionengleichungen.

1. — Die Rechnung mit Quaternionen oder mit Vectoren führt auch auf Gleichungen, worin die Unbekannten Quaternionen oder Vectoren sind. (Vergl. §. 55, 5). Die Lösung solcher Gleichungen bietet eigenthümliche Schwierigkeiten wegen der Nichtgiltigkeit des commutativen Principes bei der Multiplication der Quaternionen. So ist die einfache Gleichung

$$aq + qb = c,$$

worin neben q auch a, b und c Quaternionen bedeuten, nicht allgemein dadurch lösbar, dass wir $(a + b)q = c$ setzen. Man gelangt dagegen

auf folgendem, von Hamilton angegebenen Wege zur Lösung. Multipliciren wir die gegebene Gleichung mit Ka und in b, so erhalten wir

$$\mathrm{Ka}\,.\,\mathrm{aq} + \mathrm{Ka}\,.\,\mathrm{qb} = \mathrm{Ka}\,.\,\mathrm{c},$$

oder

$$(\mathrm{Ta})^2\,.\,\mathrm{q} + \mathrm{Ka}\,.\,\mathrm{qb} = \mathrm{Ka}\,.\,\mathrm{c},$$

und

$$\mathrm{aqb} + \mathrm{qb}^2 = \mathrm{cb}.$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen finden wir

$$(\mathrm{Ta})^2\mathrm{q} + (\mathrm{Ka} + \mathrm{a})\mathrm{qb} + \mathrm{qb}^2 = \mathrm{Ka}\,.\,\mathrm{c} + \mathrm{cb},$$

oder

$$\mathrm{q}\,.\,(\mathrm{Ta})^2 + 2\mathrm{Sa}\,.\,\mathrm{b} + \mathrm{b}^2) = \mathrm{Ka}\,.\,\mathrm{c} + \mathrm{cb},$$

woraus sich q leicht ergiebt.

Dieses Beispiel wird zeigen, dass eigenthümliche Methoden eingehalten werden müssen, um Quaternionengleichungen zu lösen.

2. — Die allgemeine Form einer Quaternionengleichung ersten Grades ist

$$\mathrm{a_1\,q\,b_1} + \mathrm{a_2\,q\,b_2} + \ldots + \mathrm{a_n\,q\,b_n} = \mathrm{c},$$

oder kürzer

$$\Sigma\,\mathrm{a_n\,q\,b_n} = \mathrm{c}.$$

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades ist dagegen

$$\Sigma\,\mathrm{a_n\,q\,b_n\,q\,c_n} + \Sigma\,\mathrm{d_m\,q\,e_m} = \mathrm{g},$$

worin alle Grössen Quaternionen sind, die aber auch zum Theil in Vectoren oder Scalare übergehen können. Eine solche quadratische Gleichung, z. B.

$$\mathrm{aqbqc} + \mathrm{dqe} = \mathrm{g},$$

lässt sich dadurch lösen, dass wir

$$\mathrm{q} = \mathrm{w} + \mathrm{i_1\,x} + \mathrm{i_2\,y} + \mathrm{i_3\,z}$$

setzen und nun die Werthe von w, x, y, z zu ermitteln suchen. Diess könnte so erfolgen, dass wir die bekannten Quaternionen a, b, c ... auch in dieser Form darstellten und die in der Gleichung angedeuteten Multiplicationen ausführten. Wir erhalten dadurch auf beiden Seiten Aggregate von der Form

$$\mathrm{A} + \mathrm{B\,i_1} + \mathrm{C\,i_2} + \mathrm{D\,i_3}.$$

Setzen wir die entsprechenden Coefficienten an den i, sowie die absoluten Glieder der rechten und der linken Seite der Gleichung einander gleich, so bekommen wir vier Gleichungen, die aber in w, x, y, z vom zweiten Grade sind, die also für diese Unbekannten durch Elimination zu Schlussgleichungen vom 16. Grade führen würden. Wir erhalten also auf diesem Wege schliesslich 16 Systeme zusammengehöriger Werthe der Unbekannten und mithin von q als Lösung der quadratischen Gleichung.

Eine ähnliche Schlussweise würde lehren, dass eine kubische Quaternionengleichung zu 81, und allgemein eine Gleichung n ten Grades zu n^4 Lösungen führen würde.

Hamilton hat diesem umständlichen Wege gegenüber versucht, die Lösung von Quaterniongleichungen direct zu geben, ohne auf die Ermitte-

lung der Elemente der viergliedrigen Normalform zurückzugehen, und er hat auch für die Gleichungen ersten Grades mit Quaternionen oder Vectoren als Unbekannten allgemeine Methoden aufgestellt, die man in seinen und in Tait's Elements of Quaternions findet. Wir geben hier nur die Lösung einiger Gleichungen ersten Grades, die wir dem Lehrbuche von Tait entlehnen.

3. — Damit eine Gleichung mit einer unbekannten Quaternion für diese eine vollständig bestimmte Lösung ergiebt, muss in den bekannten Stücken sich Scalar- und Vectortheil finden. So ist $q = c$, wo

$$c = c_0 + c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 \text{ oder } = Tc \,.\, (\cos\varphi + \gamma \sin\varphi),$$

völlig ausreichend, um q zu bestimmen.

Dagegen führt $Tq = c_0$, wo c_0 nur ein Scalar ist, zu

$$q = c_0 \,.\, Uc,$$

worin jetzt c eine ganz beliebige Quaternion ist. Ebenso führt $Sq = a$, wenn a ein Scalar ist, zu

$$q = a + \alpha,$$

worin α ein beliebiger Vector sein kann. In den beiden gegebenen Gleichungen ist nur eine Scalarbedingung gegeben, die Lösung enthält daher noch drei unbestimmte Scalare.

Auch $TVq = b$ führt zu einer Lösung mit drei willkürlichen Scalaren. Denn aus unsrer Gleichung folgt

$$Vq = b\beta,$$

wo β jetzt ein willkürlich gerichteter Einheitsvector ist. Es sind daher in

$$q = w + b\beta$$

w und die beiden zur Bestimmung der Richtung von β nöthigen Scalare unbestimmt.

Dagegen führt $V.\alpha Vq = \beta$ zu nur zwei unbestimmten Scalaren. Denn $Sq = x$ gesetzt, ergiebt

$$V\alpha q = V\alpha(Vq + Sq) = V\alpha(Vq + x) = \beta + x\alpha.$$

Daher $$\alpha q = y + \beta + x\alpha,$$

wenn wir $S\alpha q = y$ setzen, und endlich

$$q = \alpha^{-1}\beta + x + y\alpha^{-1}.$$

Die Gleichung $$V\alpha q = \beta$$

führt zu einer Lösung mit nur einem unbestimmten Scalar. Denn setzen wir $S\alpha q = x$, so haben wir

$$S\alpha q + V\alpha q = x + \beta,$$
$$\alpha q = x + \beta,$$
$$q = \alpha^{-1}(x + \beta).$$

Die Gleichung endlich

$$\alpha q = \beta$$

führt zu $$q = \alpha^{-1}\beta.$$

4. — Die allgemeine Form einer Gleichung ersten Grades ist

$$\Sigma \mathrm{a q b} = \mathrm{g},$$

worin alle Grössen Quaternionen und q die Unbekannte ist.

Man kann nun zeigen, dass die Lösung einer solchen Quaternionengleichung sich immer auf die einer Vectorgleichung zurückführen lässt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathrm{aqb} &= \mathrm{Saqb} + \mathrm{Vaqb} = \mathrm{Sbaq} + \mathrm{Vaqb} \\ &= \mathrm{Scq} + \mathrm{Vaqb}, \end{aligned}$$

wenn wir $\mathrm{ba} = \mathrm{c}$ setzen. Daher wird die obige allgemeine Gleichung zu

$$\Sigma \mathrm{Vaqb} + \Sigma \mathrm{Scq} = \Sigma \mathrm{Vaqb} + \mathrm{Scq} = \mathrm{g},$$

wobei $\Sigma \mathrm{Scq}$ zu Scq vereinfacht ist. Nimmt man von dieser Gleichung einzeln den Scalar- nnd den Vectortheil, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{Sg} &= \mathrm{Scq} = \mathrm{Sc} \,.\, \mathrm{Sq} + \mathrm{S} \,.\, \mathrm{Vc\,Vq}, \\ \mathrm{Vg} &= \Sigma \mathrm{Vaqb} = \Sigma \mathrm{Va\,(Sq + Vq)\,b} \\ &= \Sigma \mathrm{Sq} \,.\, \mathrm{Vab} + \Sigma \mathrm{V(a} \,.\, \mathrm{Vq} \,.\, \mathrm{b)} = \mathrm{Sq}\, \Sigma \mathrm{Vab} + \Sigma \mathrm{V(a} \,.\, \mathrm{Vq} \,.\, \mathrm{b)}. \end{aligned}$$

Aus den Ausdrücken für Sg und Vg lässt sich Sq eliminiren, so dass uns nur eine Gleichung ersten Grades für Vq bleibt. Bezeichnen wir Vq mit ϱ, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\mu = \alpha \mathrm{S} \beta \varrho + \gamma \mathrm{V} \alpha \varrho \mathrm{b},$$

wobei wir der Kürze halber das Σ weggelassen haben. Nun ist aber (§. 53, 6, III)

$$\varrho \,.\, \mathrm{S} \alpha \beta \gamma = \mathrm{V} \alpha \beta \, \mathrm{S} \gamma \varrho + \mathrm{V} \beta \gamma \, \mathrm{S} \alpha \varrho + \mathrm{V} \gamma \alpha \, \mathrm{S} \beta \varrho.$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich letzte Gleichung auf die Form bringen

$$\alpha_1 \mathrm{S} \beta_1 \varrho + \alpha_2 \mathrm{S} \beta_2 \varrho + \ldots = \Sigma \alpha \mathrm{S} \beta \varrho = \gamma.$$

Hat man aber aus dieser Vectorgleichung ϱ, d. h. Vq gefunden, so ergiebt eine der Gleichungen für Sg oder Vg den Werth von Sq; damit ist dann aber q selbst ermittelt.

5. — Wir schliessen unsre Untersuchungen mit der Lösung einiger besonderen Vectorgleichungen.

Es sei

$$\mathrm{V} \alpha \varrho \beta = \gamma.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{S} \,.\, \alpha \mathrm{V} \alpha \varrho \beta &= \mathrm{S} \alpha \gamma, \\ \mathrm{S} \alpha^2 \varrho \beta &= \alpha^2 \mathrm{S} \varrho \beta = \mathrm{S} \alpha \gamma. \end{aligned}$$

Ferner haben wir

$$\mathrm{S} \,.\, \beta \mathrm{V} \alpha \varrho \beta = \mathrm{S} \beta \alpha \varrho \beta = \mathrm{S} \beta^2 \alpha \varrho = \beta^2 \mathrm{S} \alpha \varrho = \mathrm{S} \beta \gamma.$$

Nun ist aber nach §. 53, 5, IV

$$\mathrm{V} \alpha \varrho \beta = \alpha \mathrm{S} \beta \varrho - \varrho \mathrm{S} \alpha \beta + \beta \mathrm{S} \alpha \varrho = \gamma,$$

daher

$$\varrho \, \mathrm{S} \alpha \beta = \alpha \mathrm{S} \beta \varrho + \beta \mathrm{S} \alpha \varrho - \gamma,$$

und mit Benutzung der obigen Resultate

$$\varrho \mathrm{S} \alpha \beta = \alpha^{-1} \mathrm{S} \alpha \gamma + \beta^{-1} \mathrm{S} \beta \gamma - \gamma.$$

Sind α, β und γ complanar, so ist $S\alpha\beta\gamma = 0$, daher

$$S\alpha\beta V\alpha\varrho\beta = S\alpha\beta\gamma = 0.$$

Hieraus lässt sich folgern, das ϱ mit α, β und γ complanar ist. Folglich ist

$$V\alpha\varrho\beta = S\alpha\varrho\beta + V\alpha\varrho\beta = \alpha\varrho\beta = \gamma,$$

also

$$\varrho = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}.$$

6. — Es sei gegeben

$$V\alpha\beta\varrho = \gamma,$$

so folgt hieraus

$$\gamma = V\alpha\beta\varrho = V(S\alpha\beta + V\alpha\beta)\varrho = \varrho S\alpha\beta + V(V\alpha\beta)\varrho.$$

Operirt man auf diese Gleichung mit $S.V\alpha\beta$, so ist

$$S(V\alpha\beta.\gamma) = S\alpha\beta\gamma = S.[V\alpha\beta.\varrho S\alpha\beta + V\alpha\beta.V(V\alpha\beta)\varrho]$$
$$= S\alpha\beta S.V(\alpha\beta).\varrho,$$

weil

$$S.V\alpha\beta V.V(\alpha\beta).\varrho = S.V\alpha\beta.[VV(\alpha\beta)\varrho + SV\alpha\beta.\varrho]$$
$$= S.V\alpha\beta.V(\alpha\beta).\varrho = S(V\alpha\beta)^2.\varrho = 0.$$

Folglich ist

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha\beta\varrho.S\alpha\beta,$$

also

$$S\alpha\beta\varrho = S\alpha\beta\gamma : S\alpha\beta,$$

und da

$$V\alpha\beta\varrho = \gamma,$$

so ist

$$\alpha\beta\varrho = \gamma + S\alpha\beta\gamma : S\alpha\beta,$$

und

$$\varrho = \beta^{-1}\alpha^{-1}(\gamma + S\alpha\beta\gamma : S\alpha\beta).$$

7. — Es sei endlich

$$\alpha_1 S\beta_1\varrho + \alpha_2 S\beta_2\varrho + \alpha_3 S\beta_3\varrho = \gamma.$$

Operiren wir auf diese Gleichung der Reihe nach mit $S.\alpha_2\alpha_3$, $S.\alpha_3\alpha_1$ und mit $S.\alpha_1\alpha_2$, so erhalten wir

$$S.\alpha_2\alpha_3\alpha_1 S\beta_1\varrho = S.\alpha_2\alpha_3\gamma,$$
$$S.\alpha_3\alpha_1\alpha_2 S\beta_2\varrho = S.\alpha_3\alpha_1\gamma,$$
$$S.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 S\beta_3\varrho = S.\alpha_1\alpha_2\gamma.$$

Nun ist (§. 53, 6, III)

$$\delta S\alpha\beta\gamma = V\alpha\beta S\gamma\delta + V\beta\gamma S\alpha\delta + V\gamma\alpha S\beta\delta,$$

also auch

$$\varrho.S\alpha_1\alpha_2\alpha_3.S\beta_1\beta_2\beta_3 =$$
$$V\beta_1\beta_2 S\alpha_1\alpha_2\gamma + V\beta_2\beta_3 S\alpha_2\alpha_3\gamma + V\beta_3\beta_1 S\alpha_3\alpha_1\gamma,$$

und damit ist ϱ bestimmt.

8. — Um ausser der früher gelösten Quaternionengleichung $aq + qb = c$ noch ein weiteres Beispiel vorzuführen, so sei von $p = \sqrt[3]{q}$ das Differential dp zu finden. Es ist $p^3 = q$, daher

$$p^2dp + pdp.p + dp.p^2 = dq.$$

Durch gleichzeitige Multiplication mit p und in p^{-1} erhalten wir

$$p^3dp.p^{-1} + p^2dp + pdp.p = pdq.p^{-1}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von der vorhergehenden bekommen wir

$$dp \,.\, p^2 - p^3 dp \,.\, p^{-1} = dq - p\,dq \,.\, p^{-1},$$

und durch Multiplication in p

$$dp \,.\, p^3 - p^3\, dp = dq \,.\, p - p\, dq.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich aber dp, d. h. $d\sqrt[3]{q}$ finden nach dem zur Lösung von

$$aq + qb = c$$

eingeschlagenen Verfahren.

Die quadratische Gleichung

$$q^2 = aq + qb$$

lässt sich durch gleichzeitige Multiplication in und mit q^{-1} umwandeln in

$$1 = q^{-1} a + b \,.\, q^{-1}$$

und lässt sich auf die Form $aq + qb = c$ zurückführen, wenn man auf beide Seiten mit K operirt.

Sechster Abschnitt.

Die longimetrischen Quaternionen.

§. 57. Die Producte und Quotienten von Punkten.

1. — Weder von Möbius noch von Hamilton wird versucht, den Quotienten zweier Punkte geometrischen Betrachtungen zu Grunde zu legen, wenigstens nicht in denjenigen Schriften dieser beiden hervorragenden Männer, die dem Verfasser bekannt sind. Möbius sagt sogar ganz bestimmt in seinem barycentrischen Calcul, dass die Operationen mit Punktausdrücken sich nur auf Addition und Subtraction der Punkte selbst beziehen könnten, entsprechend dem Zufügen und Wegnehmen materieller Punkte in der Wirklichkeit. Wir wollen im Folgenden den Quotienten zweier Punkte betrachten und die Verwendbarkeit dieses Begriffes bei mathematischen Untersuchungen nachweisen.

Während Hamilton die Differenz $b - a$ als den Vector ab definirt, wollen wir den Quotienten $b : a$ als die Strecke ab nach Grösse und Richtung ansehen.

Beide Auffassungen haben für den ersten Augenblick etwas Befremdendes. Bei Hamilton erscheint eine räumliche Grösse, eine Länge von endlicher Dimension, als die Differenz zweier Raumgebilde, deren Grösse wir als eine Art Null zu betrachten gewohnt sind. Die Erklärung des Vectors ab als des Quotienten $b : a$ verlangt dagegen, dass zwei Nullwerthe durch Division eine endliche Grösse ergeben.

Dass aber im ersten Falle eine Verschiedenheit der Punkte a und b besteht, also eine Differenz, wenn dieselbe auch nur eine Verschiedenheit der Lage ist, sieht man leicht ein. Es kann dann auch der Abstand der Punkte als eine Art Mass dieser Lagendifferenz eingeführt und mit Zuziehung einiger anderen Annahmen zur Grundlage von Untersuchungen gemacht werden, deren Resultat eben Hamilton's Quaternionentheorie ist. Dass für die neue Annahme, wobei $b : a$ gleich dem Vector ab gesetzt wird, die Glieder des Quotienten beide Null sind, erregt vielleicht weniger

Anstoss; sind wir doch aus allen Gebieten der Mathematik an solche Grenzwerthe von Quotienten gewöhnt und auch daran, dass ein Quotient eine von seinen Gliedern ganz verschiedene Grösse liefert. Als Grenzwerth lässt sich aber $b:a$ auffassen, indem wir in $bb_1 : aa_1$ die Punkte a_1 und b_1 auf parallelen Richtungen sich a und b so nähern lassen, dass aa_1 und bb_1 fortwährend gleiche Länge behalten.

Ein andres Bedenken gegen die Auffassung eines Vectors als Quotienten ergiebt sich noch daraus, dass in Folge der Definition $a:b$ gleich der Strecke ba wäre, dass also die Umdrehung eines Punktquotienten dieselbe Strecke ergäbe, nur mit umgekehrter Richtung. Es wären also ein Punktquotient und sein reciproker Werth der Grösse nach einander gleich, eine Eigenschaft, die sonst nur den Quotienten vom Werthe eins zukommt. Hiergegen lässt sich erwidern, dass bei der quantitativen Gleichheit, die wir einfachen Punkten beilegen müssen, der Quotient zweier solchen Punkte und sein reciproker Werth in der That quantitativ identisch sein können, dass die Verschiedenheit daher nur eine qualitative sein kann, die sich hier durch die entgegengesetzte Richtung ausdrückt. Ist aber ein $m$facher Punkt durch einen $n$fachen zu dividiren, also etwa $m.b$ durch $n.a$, so setzen wir dieses gleich

$$\frac{m}{n} \cdot ab,$$

während $n.a$ dividirt durch $m.b$ als Quotienten

$$\frac{n}{m} \cdot ba$$

ergiebt. Es ist jetzt also der Quotient zweier Punkte auch quantitativ verschieden von seinem reciproken Werthe.

2. — Um in Uebereinstimmung mit der Arithmetik zu bleiben, nehmen wir an, dass aus

$$b:a = ab$$

folgt

$$b = ab.a.$$

Durch Multiplication des Punktes a mit der Strecke ab wird also jetzt der Punkt a um diese Strecke nach Grösse und Richtung verschoben. Es ist mithin die Strecke ab ein Operator, der den Punkt a durch Multiplication um die Länge und in der Richtung ab verschiebt. Dass diese Wirkung auch auf einen beliebigen Punkt hervorgebracht wird, ergiebt sich leicht, wenn wir vorher noch festgestellt haben, wann solche Strecken als einander gleich gelten sollen.

Da kein Grund vorhanden, wodurch die Verschiebung eines Punktes an der einen Stelle im Raume einen anderen Werth haben sollte, als an einer andern Stelle, wenn nur Grösse, Richtung und Sinn dieser Verschiebungen einander gleich sind, so setzen wir auch hier ab gleich cb, oder

$b : a$ gleich $b : c$, wenn ab und cb gleich gerichtete Gegenseiten eines Parallelogrammes sind. Es ist daher auch

$$ab \,.\, c = cb \,.\, c = \frac{b}{c}\, c = b,$$

d. h. auch der beliebige Punkt c wird durch Multiplication mit ab um den Vector ab verschoben.

In dieser Eigenschaft der durch Division zweier Punkte erlangten Vectoren, einen Punkt durch Multiplication zu verschieben, liegt der wesentliche Unterschied der Quotientvectoren, wie wir dieselben nennen können, und der Differenzvectoren Hamilton's, zugleich auch mit die Berechtigung einen Vector einmal als Differenz, das andre Mal als Quotient zu definiren. Die zwei so erlangten Vectorenarten sind nicht identisch, und wir werden daher auch später zur Unterscheidung die Quotientvectoren mit lateinischen Lettern bezeichnen, während wir für die Differenzvectoren die griechischen Buchstaben beibehalten.

Aus der Gleichung $b : a = b : c$

folgt, dass ab und cb gleich gerichtete Gegenseiten eines Parallelogrammes sind. Es müssen daher auch ac und bb Gegenseiten, mithin auch

$$c : a = b : b$$

sein. Die Vertauschung der inneren oder äusseren Glieder in obiger Proportion ist also auch für Punkte gestattet. Wir nehmen ferner als Folgerung aus obigen Gleichungen an, dass

$$a \,.\, b = b \,.\, c$$

sei, ohne dass wir bis jetzt festgestellt, welche Bedeutung wir einem solchen Producte zweier Punkte beizulegen haben. Wir wissen nur, dass die Producte aus den Gegenecken eines Parallelogrammes einander gleich sind.

Lassen wir aber das Parallelogramm $abbc$ unendlich schmal werden, etwa dadurch, dass sich der Winkel bei a der Null nähert, so fallen an der Grenze die vier Punkte a, b, b, c in eine Gerade, und wir kommen zu dem Resultate, dass wenn für vier Punkte einer Geraden ab gleich cb ist, so ist das Product $a \,.\, b$ gleich $b \,.\, c$.

Ist das Parallelogramm $abbc$ ein Rhombus, so fällt beim Verschwinden des Winkels an a der Punkt c auf b, und wir haben daher jetzt

$$a \,.\, b = b \,.\, c = b^2,$$

weil jetzt b und c identisch sind. Da aber b in der Mitte zwischen a und b liegt, so gelangen wir zu dem Satze, dass das Product zweier Punkte gleich dem Quadrat des Halbirungspunktes ihres Abstandes ist.

Aus diesem Resultat folgt sofort, dass die Factoren eines solchen Punktproductes vertauschbar sind, indem

$$a \,.\, b = m^2 = b \,.\, a,$$

wenn m der Halbirungspunkt der Strecke ab ist.

3. — Was aber haben wir uns unter dem Quadrate eines Punktes oder unter einem quadratischen Punkte vorzustellen? Wir betrachten die Quadrate von Punkten ebenfalls als Punkte, die sich an der Stelle der einfachen Punkte gleichen Namens im Raume befinden, und für welche in Bezug auf Addition und Subtraction ganz die Gesetze gelten, die wir in §. 43 für einfache Punkte aufgestellt haben. So ist namentlich

$$a^2 + b^2 = 2\,m^2,$$

wenn m der Halbirungspunkt der Strecke ab ist; und es stellt $b^2 - a^2$ entweder einen quadratischen Punkt im Unendlichen dar, oder es ist ein Operator, der zu einem quadratischen Punkte c^2 addirt, diesen um ab verschiebt.

Dagegen ist der Quotient $b^2 : a^2$ die doppelte Strecke ab, oder ein Operator, der mit c multiplicirt, diesen Punkt um $2.ab$ verschiebt. Denn

$$c \cdot \frac{b^2}{a^2} = c \cdot \frac{b^2}{c^2} = c \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{b}{c} = e,$$

wenn wir annehmen, dass $abbc$ ein Parallelogramm, und dass be gleich cb ist. Dagegen haben wir

$$c^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} = c^2 \cdot \frac{b^2}{c^2} = b^2;$$

auf einen quadratischen Punkt wirkt also $\frac{b^2}{a^2}$ wie $\frac{b}{a}$ auf einen Punkt erster Ordnung.

Das Product von n Punkten werden wir auch als einen Punkt auffassen, den wir $n$ter Ordnung nennen. Dann gelten für Punkte derselben Ordnung die Gesetze des barycentrischen Calculs in Bezug auf Addition und Subtraction. Der Quotient zweier solcher Punkte ist dagegen ein Operator, der mit einem Punkte erster Ordnung multiplicirt, diesen um den $n$fachen Abstand der Glieder des Quotienten verschiebt. So ist unter Beibehaltung der oben benutzten Bezeichnung

$$c \cdot \frac{b^n}{a^n} = c \cdot \frac{b^n}{c^n} = b \cdot \frac{b^{n-1}}{c^{n-1}}$$
$$= b \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \ldots \cdot \frac{b}{c} = e,$$

wenn $ce = n.cb$ ist.

Zu der Stelle im Raume für einen Punkt $n$ter Ordnung, der als Product

$$a.b.c \ldots p = m^n$$

auftritt, werden wir durch folgende Betrachtung geführt.

Das Product dreier beliebigen Punkte a, b, c bezeichnen wir mit m^3 und nennen m^3 einen kubischen Punkt oder einen Punkt dritter Ordnung. Lassen wir für das Product

$$a.b.c = m^3$$

das associative Princip gelten, indem wir

$$(a \,.\, b)\, c = a\,(b \,.\, c) = m^3$$

annehmen, so lässt sich zeigen, dass m^3 im Schwerpunkte von a, b, c liegt. Setzen wir nämlich $a \,.\, b = c_1{}^2$, wo c_1 der Halbirungspunkt von ab ist, so haben wir

$$(a \,.\, b)\, c = c_1{}^2 \,.\, c,$$

während für $b \,.\, c = a_1{}^2$, wo a_1 die Strecke bc halbirt,

$$a\,(b \,.\, c) = a \,.\, a_1{}^2.$$

Da wir nun $c_1{}^2 \,.\, c$ auf $c\,c_1$, dagegen $a \,.\, a_1{}^2$ auf $a\,a_1$ zu suchen haben (es ist wenigstens kein Grund vorhanden, diese Punkte ausserhalb der genannten Strecken anzunehmen), so muss der Schnittpunkt der beiden Mittellinien $a\,a_1$ und $c\,c_1$ der Ort des gesuchten Punktes sein. Es liegt also der Punkt m^3 so, dass er den Abstand zwischen a und $a_1{}^2$ im umgekehrten Verhältniss der Exponenten der Factoren theilt.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen finden wir, dass, wenn

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, b = m^4,$$

m^4 zusammen fällt mit dem Schwerpunkt der Punkte a, b, c, b.

Durch diese beiden besonderen Fälle veranlasst, stellen wir als Princip fest, dass

$$a^m \,.\, b^n = p^{m+n}$$

einen Punkt m + nter Ordnung darstellt, welcher den Abstand ab im umgekehrten Verhältniss der Exponenten innerlich oder äusserlich theilt, je nachdem m und n gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Aus diesem Satze lässt sich dann umgekehrt das associative Princip für $a \,.\, b \,.\, c$ nachweisen. Denn $(a \,.\, b)\, c$ stellt dann einen Punkt dar, welcher $c\,c_1$, $a\,(b \,.\, c)$ dagegen einen Punkt, der $a\,a_1$ im Verhältniss von 2 zu 1 innerlich theilt. Diese Punkte fallen aber zusammen, folglich ist

$$(a \,.\, b)\, c = a\,(b \,.\, c).$$

Auch das distributive Princip lässt sich jetzt beweisen für die Multiplication. Es ist nämlich

$$(a + b)\,(c + b) = 2e \,.\, 2f = 4e \,.\, f = 4g^2,$$

wenn e, f und g die Halbirungspunkte von bezüglich ab, cb und ef sind. Es ist aber andrerseits

$$a \,.\, c + b \,.\, c + a \,.\, b + b \,.\, b$$

die Summe der vier quadratischen Punkte in den Mitten von ac, bc, ab und bb, d. h. in den Ecken eines Parallelogrammes. Diese Summe ergiebt sich leicht als vierfacher quadratischer Punkt in g.

Es ist also in der That

$$(a + b)\,(c + b) = a.c + b.c + a.b + b.b.$$

Auch die Richtigkeit von

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \,.\, b + b^2,$$

und allgemein von

$$(a + b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \ldots + b^n$$

ergiebt sich jetzt leicht daraus, dass man zeigt, wie die rechte und die linke Seite gleich $2^n \,.\, m^n$, wenn m wieder der Halbirungspunkt von ab ist.

Sollen nicht einfache, sondern mit Coefficienten behaftete Punkte durch Multiplication oder Division mit einander verbunden werden, so nimmt man die Operationen mit den Coefficienten und mit den Punkten einzeln vor, und setzt das Resultat aus der Rechnung mit den Coefficienten als Coefficient an das Resultat der Rechnung mit den Punkten. So ist

$$(a\,.\,a)\,.\,(b\,.\,b) = ab\,.\,a\,.\,b = ab\,.\,m^2,$$

und

$$\frac{b\,.\,b}{a\,.\,a} = \frac{b}{a}\,.\,\frac{b}{a} = \frac{b}{a}\,.\,ab.$$

Die Division $a^m : a^n = a^{m-n}$ führt zu der Frage nach der Bedeutung von a^0 und a^{-m}. Da a^0 aus $a : a$ entstanden, so ist es ein Quotientvector von der Länge 0, oder ein Verschiebungsfactor um die Länge 0, daher sein Werth gleich eins. Dagegen können wir a^{-m} einen divisiven Punkt nennen, den negativen früheren Punkten entsprechend. Es ist a^{-m} ein Punkt, der mit b^m multiplicirt den Vector $(ab)^m$ ergiebt.

Mit Hilfe des Vorstehenden ergiebt sich z. B.

$$1 + ab = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a} = \frac{2m}{a} = 2am,$$

d. h. ein Verfahren um eine Zahl und eine Strecke zu addiren. Allgemein ist

$$n + ab = \frac{n\,.\,a}{a} + \frac{b}{a}$$

$$= \frac{n\,.\,a + b}{a} = \frac{(n+1)\,.\,p}{a} = (n+1)\,ap,$$

wenn p den Abstand ab im Verhältniss von $1 : n$ theilt.

Ohne Schwierigkeit lassen sich die sämmtlichen Gesetze der Arithmetik, die sich auf Producte und Quotienten beziehen, sowie die Lehren der Potenzrechnung als auch für die Rechnung mit Punkten giltig nachweisen. Leicht ergiebt sich dabei, dass während $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ die $n$fache Länge ab als Multiplicationsoperator vorstellt, $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{m}}$ nur der $n : m$te Theil der Länge ab darstellt, wenn wir für Punkte mit gebrochenen Exponenten eine ähnliche Erklärung geben, wie oben für Potenzen von Punkten mit ganzen positiven Exponenten.

4. — Mit Hilfe der vorstehenden Sätze ist es nun leicht, Punkte einer Geraden, einer Ebene oder im Raume mit Hilfe einer ausreichenden Anzahl gegebener Punkte festzulegen. So ist z. B. für den Punkt $\mathfrak{m}$ der Geraden $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{m}^{x+y} = \mathfrak{a}^x \,.\, \mathfrak{b}^y ,$$

wenn x und y die Masszahlen der Abstände des Punktes $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ sind. Es ist auch

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}^{\frac{x}{x+y}} \,.\, \mathfrak{b}^{\frac{y}{x+y}} = \mathfrak{a}^{\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m}} \,.\, \mathfrak{b}^{\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{m}} ,$$

wo die longimetrischen Functionen sich auf $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ als Basis beziehen.

Ebenso ist, wenn $\mathfrak{m}$ in der Ebene der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ liegt,

$$\mathfrak{m}^{x+y+z} = \mathfrak{a}^x \,.\, \mathfrak{b}^y \,.\, \mathfrak{c}^z ,$$

oder

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}^{\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m}} \,.\, \mathfrak{b}^{\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{m}} \,.\, \mathfrak{c}^{\mathrm{Cos}_3 \mathfrak{m}} ,$$

wenn die rechts stehenden Cosinusse die Planfunctionen des Punktes $\mathfrak{m}$ in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ sind.

Endlich haben wir für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{m}$ im Raume

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}^{\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m}} \,.\, \mathfrak{b}^{\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{m}} \,.\, \mathfrak{c}^{\mathrm{Cos}_3 \mathfrak{m}} \,.\, \mathfrak{d}^{\mathrm{Cos}_4 \mathfrak{m}} ,$$

worin die Raumfunctionen auf das Tetraeder $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ bezogen sind.

Wir sind auf diese Art zu einem neuen barycentrischen Calcul gelangt, worin die Punkte aber durch Multiplication statt durch Addition mit einander verbunden sind.

Ohne Schwierigkeit lassen sich die in §. 43 geführten Untersuchungen auf die jetzigen Formen übertragen.

So ist

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}^{1-x} \,.\, \mathfrak{b}^x = \mathfrak{a} \,.\, \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^x ,$$

worin x eine variable Grösse ist, die Gleichung der durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehenden Geraden, während

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}^x \,.\, \mathfrak{b}^y \,.\, \mathfrak{c}^z ,$$

worin x, y und z Functionen einer Variabeln t sind, die Gleichung einer Curve in der Ebene $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ist. Diese Curve ist eine Gerade, wenn x, y, z lineäre Functionen von t sind. Die Kegelschnitte stellen sich dagegen u. A. dar in der Form

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}^t \,.\, \mathfrak{c}^{t^2} .$$

§. 58. Die Rechnung mit Quotientvectoren.

1. — Nach der in §. 57, 1 gegebenen Definition ist der Quotient des Punktes $\mathfrak{b}$ durch den Punkt $\mathfrak{a}$ gleich der Strecke $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, nach Grösse und Richtung. Dort ergab sich weiter, dass eine solche Strecke ein Multiplicationsoperator ist, indem das Product derselben in einen Punkt einen neuen Punkt ergiebt, der von dem gegebenen um diese Strecke absteht.

Man könnte daher diese Strecken auch Multiplicationsvectoren nennen. Geeigneter für diese neuen Operatoren scheint jedoch der Name Quotientvectoren, im Gegensatz zu den Hamilton'schen Differenzvectoren.

Setzen wir, um in Uebereinstimmung mit der Arithmetik zu bleiben,

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a},$$

so folgt hieraus, dass

$$ab \,.\, bc = ac.$$

Bei der Auffassung eines Vectors als eines Multiplicationstranslators ist also das Product zweier solchen Vectoren gleich dem dritten Vector, welcher mit den aufeinanderfolgenden beiden ersten ein Dreieck bildet; und es ist obige Gleichung so aufzufassen: Wenn auf den Punkt a erst die Translation ab wirkt, und sodann die Translation bc, so ist dies dasselbe, als wirkte die Translation ac.

Aus der Definition der Quotientvectoren folgt ferner, dass

$$ab \,.\, bc \,.\, cb = ab,$$

und allgemein, dass

$$ab \,.\, bc \,.\, cb \,.\,.\,.\,. \, mn = an.$$

Ueber die Zulässigkeit der Bezeichnung der vorliegenden Operationen mit dem Namen einer geometrischen Multiplication von Quotientvectoren, da es sich doch anscheinend um eine geometrische Addition der Vectoren handelt, findet sich weiter unten eine Bemerkung. Bei der Multiplication complanarer Quaternionen erfolgt übrigens auch eine Addition der Quaternionenwinkel.

2. — Da Quotientvectoren von gleicher Länge und Richtung durch Multiplication mit Punkten diese um gleichviel und in derselben Richtung verschieben, so sieht man solche Vectoren als gleichwerthig an. Mit Hilfe dieser Voraussetzung kann man nachweisen, dass die Vectorenmultiplication eine associative und eine commutative Operation ist. Denn sind ab, bc, cb die Kanten eines Parallelepipedons, so ist

$$ab \,.\, bc \,.\, cb = ab.$$

Es ist aber auch

$$(ab \,.\, bc) \,.\, cb = ac \,.\, cb = ab,$$

und

$$ab \,.\, (bc \,.\, cb) = ab \,.\, bb = ab;$$

folglich ist

$$(ab \,.\, bc)\, cb = ab\,(bc \,.\, cb).$$

Die commutative Eigenschaft von $ab \,.\, bc$, wonach $ab \,.\, bc = bc \,.\, ab$ ist, ergiebt sich leicht mit Hilfe eines Parallelogrammes, ähnlich wie in §. 44, 6 dieselbe Eigenschaft für $ab + bc$ nachgewiesen wurde.

3. — Sind a, b, c die Eckpunkte eines Dreiecks, so ist

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1,$$

mithin $$ab \,.\, bc \,.\, ca = 1;$$

und ebenso für ein n eck

$$ab \,.\, bc \,.\, cb \,\ldots\, mn \,.\, na = 1.$$

Diese Resultate sind in Uebereinstimmung damit, dass wir $a : a = 1$ gesetzt und damit einen Multiplicationsoperator bezeichneten, der um die Länge Null verschob. Ebenso wird $m \,.\, a : a = m$ ein Factor sein, der einen Punkt vervielfacht, ohne dessen Stelle zu verändern.

Da auch $ab \,.\, ba = 1$, so ist

$$ba = \frac{1}{ab} = (ab)^{-1}.$$

Während also bei Differenzvectoren, d. h. bei Vectoren, die als Differenzen ihrer Endpunkte auftreten, die Umkehrung der Richtung durch den Factor -1 angezeigt wurde, so wird diess hier durch den Exponenten -1 bewirkt. Dieses Resultat liesse sich auch so erlangen:

$$ab = \frac{b}{a} = \frac{b : b}{a : b} = \frac{1}{ba} = (ba)^{-1}.$$

Und auch die Gleichung $ab \,.\, bc = ac$ kann darauf führen. Aus ihr folgt nämlich

$$ab = ac : bc.$$

Lässt man hierin aber c nach a rücken, so erhält man

$$ab = aa : ba = 1 : ba = (ba)^{-1}.$$

Die Division des Vectors ab durch den Vector bc lässt sich leicht auf eine Multiplication zurückführen. Es ist

$$\frac{ab}{bc} = \frac{b}{a} : \frac{c}{b} = \frac{b}{a} : \frac{b}{b} = \frac{b}{a} = ab,$$

wenn $bb = cb$ ist. Dasselbe Resultat hätten wir aber auch erhalten durch

$$ab : bc = ab \,.\, cb = ab \,.\, bb = ab.$$

Anstatt mit einem Vector zu dividiren, kann man also mit dem der Richtung nach umgekehrten Vector multipliciren.

Liegen die Punkte a, b, c in einer Geraden, so ist auch jetzt noch

$$ab \,.\, bc = ac.$$

Das Product zweier Vectoren derselben Richtung ist also einem dritten Vector in dieser Richtung gleich, dessen Länge aber gleich der algebraischen Summe der Längen der Factoren ist.

Hieraus folgt, dass $ab^2 = ab \,.\, ab$ gleich einem Vector derselben Richtung aber von der doppelten Länge des ab ist. Ebenso stellt ab^n einen Vector in der Richtung von ab aber von nfacher Länge wie ab dar. Wir müssen daher hier $n \,.\, ab$ wol unterscheiden von ab^n, indem ersteres einen Operator darstellt, der um ab verschiebt und das zu Verschiebende zugleich mit n multiplicirt, während ab^n ein Factor ist, der um die nfache Länge von ab verschiebt.

Setzen wir $ab^n = ac$, so ist $ab = \sqrt[n]{ac} = (ac)^{\frac{1}{n}}$. Es stellt also die n te Wurzel aus einem Vector einen Vector derselben Richtung dar, dessen Länge aber nur der n te Theil der Länge des Radicanden ist.

4. — Das Product von Vectoren, die mit Zahlencoefficienten behaftet sind, wird gefunden, indem man die Rechnung mit den Coefficienten und mit den Vectoren für sich führt, und das Resultat der Coefficientenrechnung als Coefficienten an das Resultat der Vectorenrechnung setzt. Es ist z. B.

$$(m \,.\, ab)\,(n \,.\, cb) = mn \,.\, ab \,.\, cb,$$

und

$$(m \,.\, ab) : (n \,.\, cb) = (m : n)\,(ab : cb).$$

Diese letzten Erklärungen zeigen also, dass bei mit Coefficienten behafteten Vectoren die Multiplication und Division in der That die Multiplication und Division der Coefficienten erheischt, dass dagegen die Vectorenoperation noch eine Verschiebung der so erlangten Resultate erfordert. Es sind daher die gewöhnlichen Rechnungen zweiter Stufe nur besondere Fälle dieser erweiterten Multiplication und Division, nämlich die, wobei die Vectoren sich auf Strecken von der Länge Null reduciren, Längen, die hier als die Verschiebungsfactoren 1 auftreten.

In Bezug auf die weiteren Bedenken aber, die man haben kann in Betreff der Berechtigung, hier von einer Multiplication zu sprechen, wo es sich scheinbar mehr um eine Addition handelt, verweisen wir auf eine Notiz in §. 17 von Hankel's Theorie der complexen Zahlen.

Die Giltigkeit sämmtlicher Sätze der zweiten Rechnungsstufe für Vectoren lässt sich nun ohne Schwierigkeit nachweisen, ebenso die Potenz- und Wurzelrechnung, so lange die Exponenten Zahlen sind. Auch für log b ergiebt sich leicht eine Bedeutung, wenn die Basis der Logarithmen dieselbe Richtung wie b hat. Die Untersuchung von ${}^a\log b$ aber, wenn a und b Quotientvectoren von verschiedener Richtung sind, heben wir für den folgenden Paragraphen auf.

5. — Wie aber steht es mit den Rechnungen erster Stufe in Bezug auf die neuen Vectoren? Um für die Addition der Quotientvectoren eine Regel zu erlangen, gehen wir von der Gleichung $a + b = 2m$ aus. Indem wir dieselbe durch den willkürlich gelegenen Punkt o dividiren, erhalten wir

$$oa + ob = 2om,$$

unter Annahme des distributiven Principes für diese Division. Die Summe zweier Vectoren, diese als die Quotienten ihrer Endpunkte betrachtet, ergiebt jetzt also nicht mehr die Diagonale des über oa und ob construirten Parallelogrammes, sondern die mit zwei multiplicirte Mittellinie des Dreiecks aob. Es ist dies ein Quotientvector, der nur um die Hälfte der obigen Diagonale verschiebt, zugleich aber das Verschobene verdoppelt.

Dieses neue Gesetz für die Addition von Vectoren umfasst ebenfalls die gewöhnliche Addition, wenn man die Zahlen der Arithmetik als alle derselben Richtung angehörig betrachtet.

Das Resultat der neuen Art Vectorenaddition lässt sich vorläufig etwa so erklären. Da das Ergebniss ein doppelter Punkt in m ist, so müssen wir auch ursprünglich zwei Punkte in o annehmen. Wird hiervon der eine nach a der andre nach b geschoben, so ist schliesslich ihre Summe gleich 2m in der Mitte zwischen a und b. Später, wo wir die Vectoren oa und ob als Quaternionen auffassen lernen, wird das Resultat der Addition sich leichter erläutern lassen.

6. — Setzen wir

$$a + b + c = 3m,$$

wo 3m im Schwerpunkte des Systems der drei Punkte liegt, so erhalten wir durch Division mit o

$$oa + ob + oc = 3om.$$

Die Summe dreier von einem Punkte ausgehenden Vectoren ist also gleich dem mit 3 multiplicirten Vector zwischen dem gemeinschaftlichen Anfange der Vectoren und dem Schwerpunkt ihrer Endpunkte.

Allgemein gelangen wir so zu

$$oa + ob + oc + \ldots + on = n.op,$$

wenn p der Schwerpunkt des Systems der n Endpunkte der Vectoren ist.

Sind dagegen a und b noch mit Coefficienten behaftet, so ist

$$m.a + n.b = (m + n)c,$$

wo c den Abstand ab im Verhältniss von n zu m theilt; und nun ergiebt sich durch Division mit o

$$m.oa + n.ob = (m + n)oc,$$

welche Gleichung auch Giltigkeit hat für negative n. Wird im letzteren Fall $m = -n$, so gelangen wir zu einem Strahl von o aus, der parallel zu ab geht und den Coefficienten Null hat. Die Bedeutung einer solchen Differenz $ob - oa$ ergiebt sich dadurch, dass wir sie zu oc addiren. Es ist

$$oc + ob - oa = 2oa_1 - oa = oa_2,$$

worin a_1 den Halbirungspunkt der Strecke bc, dagegen a_2 das Ende des verdoppelten Vectors aa_1 angiebt. Es bewirkt also eine solche Differenz der Vectoren ob und oa durch Addition zu einem beliebigen dritten Vector oc eine Umwandelung des letzteren in den Vector oa_2, mithin eine Verschiebung des Endpunktes von oc um die Strecke ab.

7. — Haben oa und ob dieselbe Richtung, aber entgegengesetzten Sinn bei gleicher Länge, so ist

$$oa + ob = 2aa = 2.$$

Bezeichnen wir oa mit a, so ist ob gleich a^{-1}, daher

$$a + a^{-1} = 2,$$

oder $$a^2 + 1 = 2a,$$
woraus $$a^2 = 2a - 1$$
folgt, die bekannte der Rechnung mit complexen longimetrischen Functionen zu Grunde liegende Beziehung, deren geometrische Bedeutung sich leicht ergiebt, wenn man beide Seiten als Translationsfactoren betrachtet für parallele Differenzvectoren.

Sind ab, bc und ca die Seiten eines Dreiecks, so ist $ab + bc + ca$ gleich 3, wie man findet, wenn man erst $ab + bc$ bildet. Es ist diess aber gleich $2(ac)^{1/2}$; nämlich gleich dem mit 2 multiplicirten halben Diagonalvector des Parallelogrammes $abcb$, welcher von a ausgeht, da

$$ab + bc = ab + ab = 2(ac)^{1/2}.$$

Folglich ist

$$ab + bc + ca = 2(ac)^{1/2} + ca = 2(ac)^{1/2} + ae,$$

wenn ae gleich ca ist. Nun ist aber

$$2(ac)^{1/2} + ae = 3aa = 3,$$

nach der Regel über die Addition der Quotientvectoren.

Dass die Summe der Seiten eines Vierecks, diese Seiten als Quotientvectoren betrachtet, gleich vier ist, folgt daraus, dass das Viereck $abcb$ betrachtet werden kann als aus zwei Dreiecken bestehend. Es ist aber

$$ab + bc + cb + ba = ab + bc + ca + ac + cb + ba - (ca + ac)$$
$$= 6 - 2 = 4.$$

Durch den Schluss von r auf $r + 1$ folgt nun leicht, dass die Summe aus den Quotientvector-Seiten eines n ecks gleich der Zahl n ist.

Der Sinn dieser auffallenden Resultate wird sich erst ergeben, wenn wir später die Quotientvectoren als longimetrische Quaternionen haben kennen gelernt, d. h. als Versoren oder Verschieber für parallele Differenzvectoren. Dann stellen z. B. ab, bc, ca drei Verschieber um diese Längen vom Anfangspunkt a aus dar, zugleich sind es aber auch schon um diese Längen verschobene parallele Differenz-Vectoren von der Länge eins.

Diese letzteren drei parallelen Einheitsvectoren summiren sich aber zu einem Vector von der Länge drei im Anfangspunkt der Quotientvectoren. Das Resultat ist also ein Differenzvector von der Länge drei mit einem Verschieber gleich Null, d. h. einfach die Zahl 3.

8. — Aus

$$a^2 = 2a - 1$$

ergiebt sich $$a^3 = 2a^2 - a = 4a - 2 - a = 3a - 2,$$
$$a^4 = 3a^2 - 2a = 6a - 3 - 2a = 4a - 3,$$

und daher allgemein

$$a^n = na - n + 1.$$

Die Richtigkeit dieser Ausdrücke macht man sich dadurch klar, dass man einen Differenzvector η einmal mit a^n und dann mit $n.a - n + 1$

multiplicirt denkt. Die Multiplication mit a^n schiebt η in eine parallele Lage, die um n mal die Länge des a vom Nullpunkt absteht. Dagegen ist $n\eta . a$ ein Vector von der Länge $n\eta$ in der Entfernung a vom Nullpunkt, und $-(n-1)\eta$ ein Vector von der Länge $(n-1)\eta$ im Nullpunkt, aber von negativer Richtung. Nach dem schon früher §. 43, 3 erwähnten Gesetze über die Addition paralleler Differenzvectoren, auf das wir übrigens noch ausführlich zurückkommen, ist die Summe von $n\eta$ in der Entfernung a und von $-(n-1)\eta$ im Nullpunkt in der That die Strecke η in der Entfernung von n mal der Länge des a oder von a^n, und damit ist die Richtigkeit obiger Gleichung bewiesen.

9. — Mit Hilfe der vorstehenden Sätze über die Rechnung mit Quotientvectoren lassen sich ganz dieselben Untersuchungen führen, wie in §. 44 mit Hilfe der dortigen Differenzvectoren.

(I.) Es stellt oa^x oder a^x einen jeden Punkt der Geraden oa dar, je nach dem Werthe, den man x beilegt. Positive x ergeben dabei die auf der positiven Richtung von oa gelegenen Punkte oder deren Vectoren, während negative Exponenten zu den auf der von o aus negativen Erweiterung des Strahles oa liegenden Vectoren führen. $a^{-\infty}$ ist hier der Vertreter des im negativ Unendlichen liegenden Punktes der Geraden a.

(II.) Um zu beweisen, dass, wenn die Seiten des Dreiecks abc von einer Transversalen in a_1, b_1 und c_1 geschnitten werden, dann

$$ab_1 . bc_1 . ca_1 = ac_1 . cb_1 . ba_1$$

ist, setzen wir

$$ac_1 = c, \quad \text{so ist} \quad c_1 b = c^p,$$
$$ba_1 = a, \quad \text{dann ist} \quad a_1 c = a^q,$$

wo p und q geeignet gewählte Zahlen darstellen. Nun haben wir

$$ab = ac_1 . c_1 b = c . c^p = c^{p+1},$$
$$bc = ba_1 . a_1 c = a . a^q = a^{q+1},$$
$$ac = ab . bc = a^{q+1} . c^{p+1},$$
$$cb_1 = ac^x = a^{x(q+1)} . c^{x(p+1)}.$$

Es ist aber auch

$$cb_1 = ca_1 . a_1 b_1 = a^{-q} . (a . c^p)^y,$$

mithin

$$a^{x(q+1)} . c^{x(p+1)} = a^{y-q} . c^{py}.$$

Hieraus folgt

$$(q+1)x = y - q \quad \text{und} \quad (p+1)x = py,$$

oder

$$x = (1+x)pq.$$

Nun ist aber

$$x = cb_1 : ac,$$
$$p = c_1 b : ac_1 \quad \text{und} \quad q = a_1 c : ba_1,$$

wobei unter diesen Strecken jetzt die Längenzahlen der Abschnitte auf den Dreiecksseiten verstanden sind. Durch Einführung dieser Werthe für x, p, q erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$\frac{cb_1}{ac} = \left(1 + \frac{cb_1}{ac}\right) \cdot \frac{c_1 b}{ac_1} \cdot \frac{a_1 c}{ba_1} = \frac{ab_1 \,.\, c_1 b \,.\, a_1 c}{ac \,.\, ac_1 \,.\, ba_1},$$

oder

$$\frac{ab_1 \,.\, bc_1 \,.\, ca_1}{ac_1 \,.\, cb_1 \,.\, ba_1} = 1.$$

(III.) Man kann versuchen, in dem vorstehenden bekannten Satze die vorkommenden Strecken als Quotientvectoren zu betrachten. Dass die Gleichung auch für diese neue Auffassung richtig ist, ergiebt sich aus dem Product der Quotientvectoren

$$ab_1 \,.\, b_1 c \,.\, ca_1 \,.\, a_1 b \,.\, bc_1 \,.\, c_1 a = 1.$$

Hieraus folgt durch Division, und weil $(a_1 b)^{-1} = ba_1$ ist,

$$ab_1 \,.\, bc_1 \,.\, ca_1 = ac_1 \,.\, cb_1 \,.\, ba_1.$$

Diese Gleichung sagt uns, dass wenn man die drei links stehenden Abschnitte der Dreiecksseiten nach Grösse und Richtung an einander trägt, man denselben Punkt (oder auch denselben Vector) erlangt, den die nach Grösse und Richtung an einander gesetzten Abschnitte der rechten Seite ergeben, ein Satz, der erweitert auch für Polygone richtig bleibt, wie man z. B. für das Viereck leicht sieht aus der Gleichung

$$ae \,.\, eb \,.\, bf \,.\, fc \,.\, cg \,.\, gb \,.\, b\mathfrak{h} \,.\, \mathfrak{h}a = 1,$$

worin e, f, g, $\mathfrak{h}$ die Schnittpunkte einer Geraden mit den aufeinander folgenden Seiten des Vierecks a b c b bedeuten. Der Beweis dieser Sätze liesse sich auch leicht mit Differenzvectoren führen, indem man bei dem Dreieck ausginge von der Gleichung

$$ab_1 + b_1 c + ca_1 + a_1 b + bc_1 + c_1 a = 0.$$

Die vorstehenden Betrachtungen sind aber auch richtig, wenn man auf jeder Seite eines Polygones ganz willkürlich einen Theilpunkt annimmt und die Producte wie vorstehend bildet. Von Interesse ist nur, wenn diese Punkte nicht willkürlich sind, sondern die Lage derselben nach einem gewissen Gesetze geordnet ist, wie hier, wo sie die Schnittpunkte mit einer Geraden sind. Man könnte für diesen Fall u. A. nach dem Ort der Punkte fragen, die sich beim Dreieck als Endpunkte der Vectoren

$$r = ab_1 \,.\, bc_1 \,.\, ca_1$$

ergeben, wenn die schneidende Gerade sich z. B. um einen festen Punkt oder um eine gegebene Curve bewegt.

(IV.) Sind a, b, c, b die Ecken eines räumlichen Vierecks, dessen Seiten durch e, f, g, $\mathfrak{h}$ halbirt werden, so ist zu beweisen, dass e g und f $\mathfrak{h}$ einander halbiren.

Lassen wir die Vectoren in a anfangen und bezeichnen wir a b, a c, a b mit b, c, d, so ist unser Satz bewiesen, wenn der Halbirungspunkt $\mathfrak{x}$ von e g denselben Ausdruck in b, c, d ergiebt, wie der Halbirungspunkt $\mathfrak{y}$ von f $\mathfrak{h}$. Nun ist

$$ae \,.\, eg = ab \,.\, bg = ag,$$

oder $$b^{1/2} \,.\, eg = d \,.\, (c : d)^{1/2} = c^{1/2}\, d^{1/2}\,.$$

Mithin ist $$eg = (cd\, b^{-1})^{1/2}\,.$$

Ebenso ergiebt sich für $\mathfrak{h}\mathfrak{f}$

$$\mathfrak{h}\mathfrak{f} = (bcd^{-1})^{1/2}\,.$$

Wir haben daher

$$a\mathfrak{x} = ae \,.\, e\mathfrak{x} = ab^{1/2} \,.\, eg^{1/2} = (bcd)^{1/4},$$

und $$a\mathfrak{y} = a\mathfrak{h} \,.\, \mathfrak{h}\mathfrak{y} = ab^{1/2} \,.\, \mathfrak{h}\mathfrak{f}^{1/2} = (bcd)^{1/4}\,.$$

Folglich fällt $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ zusammen.

Die in §. 43 gegebenen Beispiele lassen sich mit den jetzigen Mitteln ebenfalls lösen. Das Verfahren besteht nur in einem Umsetzen der Coefficienten der Differenzvectoren zu Exponenten der Quotientvectoren.

10. — Wie wir durch $r = a^x$ den Vector eines jeden Punktes der unbegrenzten Geraden mit der Richtung von a angeben können, so ist

$$r = a^x \,.\, b^y$$

ein Ausdruck, welcher jeden Punkt in der Ebene ab liefert, wenn man die Exponenten x und y richtig bestimmt. Da in dieser Gleichung r die Diagonale eines Parallelogrammes darstellt, von welchem a^x und b^y die Seiten sind, so muss man, um den Vector eines Punktes $\mathfrak{m}$ zu erhalten, für x und y nur die Masszahlen seiner Coordinaten in Bezug auf die mit a und b zusammenfallenden Axen einführen. Wenn dabei a und b nicht Einheitsvectoren sind, so dient auf der einen Axe Ta, auf der andern Tb als Längeneinheit zur Ermittelung von x und y. Sind x und y nicht von einander unabhängig, sondern beide Functionen von t, so gelangen wir zu den Gleichungen von Linien. So ist

$$r = a^x \,.\, b^{1-x} = a^{\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m}} \,.\, b^{\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{m}}$$

die Gleichung der durch die Enden von a und b gehenden Geraden, wenn die longimetrischen Functionen auf die Enden von a und b bezogen sind, während

$$r = a^k \,.\, b^x$$

die Gleichung einer Graden ist, die parallel zu b geht und auf a eine Länge von kTa abschneidet.

Es ist ferner

$$r = a^x\, b^{\sqrt{1-x^2}} = a^{\cos t}\, b^{\sin t}$$

die Gleichung einer Ellipse, während

$$r = a^x \,.\, b^{\frac{1}{x}} = a^{\mathrm{tg}\, t} \,.\, b^{\cot t}$$

die Gleichung einer Hyperbel ist.

11. — Drei nicht in einer Ebene liegende coinitiale Vectoren a, b, c ergeben zum Product

$$r = abc$$

einen vierten Vector, der als Diagonale in dem über a, b und c als

Kanten construirten Parallelepipedon auftritt. Allgemein ist

$$r = a^x \,.\, b^y \,.\, c^z$$

der Vector eines Punktes, dessen Coordinaten in Bezug auf drei räumliche Axen x, y und z zu Masszahlen haben, wenn Ta, Tb und Tc die Masseinheiten auf den einzelnen in die Richtungen von a, b und c fallenden Axen sind.

Sind x, y und z Functionen einer Variabeln, so stellt obige Gleichung eine räumliche Curve dar. Sind dagegen x, y und z Functionen zweier Variabeln, so führt r zu den Punkten einer Fläche. So ist $r = a^{\cos t} \,.\, b^{\sin t} \,.\, c^t$, wenn a, b, c längengleich und senkrecht zu einander sind, die Gleichung einer Schraubenlinie, während allgemein

$$r = a^x \,.\, b^{y-x} \,.\, c^{1-y} = a^{\cos_1 m} \,.\, b^{\cos_2 m} \,.\, c^{\cos_3 m},$$

wobei die Planfunctionen von m sich auf die Endpunkte von a, b und c beziehen, die Gleichung einer Ebene ist, die durch die Endpunkte von a, b, c geht. Endlich ist

$$r = a^{\cos \xi} \; b^{\cos \eta} \; c^{\cos \zeta}$$

die Gleichung eines Ellipsoides, wenn für die Exponenten die Gleichung gilt $\cos \xi^2 + \cos \eta^2 + \cos \zeta^2 = 1.$

12. — Um die Gleichung der Tangente an eine Curve zu finden, deren Gleichung

$$r = a^x \,.\, b^y,$$

wobei $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, setzen wir für einen zweiten Punkt

$$r_1 = a^{x+\triangle x} \,.\, b^{y+\triangle y}.$$

Dann ist die durch die Enden von r und r_1 gehende Sehne s

$$s = r_1 : r = a^{\triangle x} \,.\, b^{\triangle y}$$

ein Werth, der an der Grenze zu eins wird, der uns aber auch für unsre Zwecke geradezu im Stiche lässt. Wir sehen uns daher genöthigt auf einen anderen Grenzwerth als die gewöhnliche Derivirte der Differentialrechnung zurückzugreifen. Es ist dies die Quotialderivirte, wie sie von Professor W. Schell in die Analysis eingeführt wurde. Die Grundzüge der Theorie derselben finden sich in Grunert's Archiv, Bd. XXV, und wir wollen in Kürze das Wichtigste daraus mittheilen.

Anstatt wie in der Differentialrechnung die Aenderungen der Function $y = f(x)$ dadurch anzudeuten, dass man setzt

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x),$$

kann man einmal ausgehen von der Gleichung

$$y \,.\, \Theta y = f(x \,.\, \Theta x),$$

wobei Θx ein Werth sein soll, der die numerische Einheit zur Grenze hat; dann wird sich Θy derselben Grenze nähern müssen. Aus dieser Gleichung folgt nun

$$\Theta y = f(x \,.\, \Theta x) : f(x)$$

$$^{\epsilon x}\log \Theta y = {}^{\Theta x}\log f(x \,.\, \Theta x) - {}^{\epsilon x}\log f(x).$$

Indem wir auf der rechten Seite die natürlichen Logarithmen einführen, unter Benutzung des Satzes

$$^{a}\log z = lz : la,$$

erhalten wir

$$^{\Theta x}\log \Theta y = \frac{lf(x \,.\, \Theta x) - lf(x)}{l\Theta x}.$$

An der Grenze, wo Θx zu eins wird, geht die rechte Seite in $0 : 0$ über, und wir bekommen durch Differentiation

$$\lim {}^{\Theta x}\log \Theta y = \frac{x f'(x)}{f(x)}.$$

Ersetzen wir den Grenzwerth der linken Seite durch $\lambda\vartheta y$, die rechte Seite durch $\dot{f}(x)$, so ist

$$\lambda\vartheta y = \dot{f}(x).$$

Nennen wir Θx, Θy die Quotienten von x und y, die Grenzwerthe ϑx und ϑy die Quotiale derselben Variabeln, $\dot{f}(x)$ aber die Quotialderivirte und $\lambda\vartheta x$ den Quotiallogarithmus, so drückt

$$\lambda\vartheta y = \dot{f}(x)$$

die Gleichheit des Quotiallogarithmus und der Quotialderivirten aus. Aus ihr folgt

$$\vartheta y = (\vartheta x)^{\dot{f}(x)}.$$

Mit Hilfe des obigen Ausdruckes, wonach

$$\lambda\vartheta y = \dot{f}(x) = x f'(x) : f(x)$$

ist, ergiebt sich leicht

$$\lambda\vartheta x^m = m, \qquad \lambda\vartheta a^x = x\,la,$$

$$\lambda\vartheta e^x = x, \qquad \lambda\vartheta x^x = x(1 + lx),$$

$$\lambda\vartheta lx = (lx)^{-1}, \qquad \lambda\vartheta \sin x = x \,.\, \cot x,$$

$$\lambda\vartheta \cos x = -x \operatorname{tg} x, \qquad \lambda\vartheta \operatorname{tg} x = 2x \,.\, \operatorname{cosec} 2x,$$

$$\lambda\vartheta \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{\arcsin x},$$

$$\lambda\vartheta (u + v) = (u \,.\, \dot{u} + v \,.\, \dot{v}) : (u + v),$$

$$\lambda\vartheta (u \,.\, v) = \dot{u} + \dot{v}; \quad \lambda\vartheta (u : v) = \dot{u} - \dot{v}.$$

In Bezug auf die weiteren Gesetze der Quotialrechnung verweisen wir auf die oben genannte Abhandlung von Professor Schell.

13. — Die von Schell gegebene Formel

$$\vartheta y = (\vartheta x)^{\dot{f}(x)}$$

gilt in Bezug auf ϑx und ϑy nur für Werthe, die sich der Einheit als Grenze nähern. Es lässt sich diese Beschränkung aber aufheben, so dass ϑx und ϑy beliebige Grössen annehmen können, wenn man von folgendem Ausdruck ausgeht, der nach Analogie der Newton'schen Formel für end-

liche Differentiale (vergl. §. 52, 2) gebildet ist. Für $y = F(x)$ sei

$$y \,.\, (\vartheta y)^{\frac{1}{n}} = F\,[x\,(\vartheta x)^{\frac{1}{n}}],$$

mithin

$$(\vartheta y)^{\frac{1}{n}} = F\,[x\,(\vartheta x)^{\frac{1}{n}}] : F(x),$$

$$\vartheta y = \left(F\,[x(\vartheta x)^{\frac{1}{n}}] : F(x)\right)^n.$$

Dann ist

$$\vartheta_x \log \vartheta y = n \,.\, \left(\vartheta_x \log F\left(x \,.\, \vartheta x^{\frac{1}{n}}\right) - \vartheta_x \log F(x)\right)$$

$$= \frac{l\,F\left(x \,.\, \vartheta x^{\frac{1}{n}}\right) - l\,F(x)}{l\left(\vartheta x^{\frac{1}{n}}\right)}.$$

An der Grenze, d. h. für $n = \infty$, erhalten wir

$$\vartheta_x \log \vartheta y = \frac{x\,F'(x)}{F(x)} = \dot{F}(x),$$

oder

$$\vartheta y = \vartheta x^{\dot{F}(x)},$$

Formeln, welche nun für jeden Werth von ϑx gelten, die zugleich aber diejenigen des scharfsinnigen Begründers der Quotialrechnung umfassen.

Ist $r = F(t)$ die in Quotialvectoren gegebene Gleichung einer Curve, wobei $F(t)$ die Form

$$a^x \,.\, b^y \quad \text{oder} \quad a^x \,.\, b^y \,.\, c^z$$

hat, je nachdem die Curve eben oder nicht eben ist (x, y und z sind dann von t abhängig), und sei

$$r_1 = F\left(t \,.\, \vartheta t^{\frac{1}{n}}\right)$$

der Ausdruck für den Vector eines zweiten Punktes, so ergiebt sich

$$r_1 : r = F\left(t \,.\, \vartheta t^{\frac{1}{n}}\right) : F(t)$$

als ein Ausdruck für die Sehne, welche durch die Endpunkte von r und r_1 geht. Bezeichnen wir diese Sehne mit $s^{\frac{1}{n}}$, so ist

$$s = \left(F\,[t \,.\, (\vartheta t)^{\frac{1}{n}}] : F(t)\right)^n,$$

daher

$$\lim \vartheta_t \log s = \dot{F}(t),$$

und

$$s = \vartheta t^{\dot{F}(t)}.$$

An der Grenze ist aber s ein Vector in der Richtung der Tangente. Daher bekommen wir als Gleichung der Tangente in demjenigen Punkte der Curve, dessen Vector r_1 ist,

$$r = r_1\, s^x = r_1\, (\vartheta t)^{\dot{F}(t_1)\, x} = r_1\, (\vartheta t)^{x\, \dot{r}_1},$$

worin r der Vector eines Punktes der Tangente ist, während x eine Va-

riable bezeichnet, die zu den einzelnen Punkten der Tangente führt. Die Gleichung lässt sich vereinfachen, wenn man $(\vartheta t)^x = \Theta t$ setzt. Dadurch wird Θt einfach zu einer Variabeln, der man jeden Werth beilegen kann, und wir haben jetzt

$$r = r_1 (\Theta t)^{\dot{F}(t_1)} = r_1 (\Theta t)^{\dot{r}_1}$$

als einfachste Form für die Gleichung der Tangente im Punkte r_1.

So bekommen wir aus der Gleichung der Hyperbel

$$r = a^t b^{\frac{1}{t}}, \qquad \dot{r} = t\,la - \frac{1}{t} . lb;$$

daher als Gleichung der Tangente

$$r = r_1 \Theta t^{(t_1 la - t_1^{-1} lb)}.$$

Ersetzt man hierin die natürlichen Logarithmen durch solche mit der Basis Θt, so erhält man schliesslich

$$r = a^{t_1} . b^{\frac{1}{t_1}} . (a^{t_1} b^{-\frac{1}{t_1}})^{l\Theta t}$$

$$= a^{t_1(1 + l\Theta t)} . b^{\frac{1}{t_1}(1 - l\Theta t)} .$$

Setzen wir hierin $\Theta t = e$, so ist $r = a^{2t_1}$; für $\Theta t = e^{-1}$ ist $r = b^{\frac{2}{t_1}}$, Werthe, welche zeigen, dass die Tangente auf den Asymptoten (welche in die Richtungen von a und b fallen) Stücke abschneiden, die das Doppelte der Coordinaten des Berührungspunktes sind.

14. — Stellt in der Gleichung einer Curve in Quotientvectoren

$$r = f(t)$$

die Variable t die Zeit dar, so kann man nach der Vectorgeschwindigkeit des die Curve beschreibenden Punktes fragen. Nun sei

$$r . \vartheta r^{\frac{1}{n}} = f(t . \vartheta t^{\frac{1}{n}}),$$

daher

$$\vartheta r^{\frac{1}{n}} = f(t . \vartheta t^{\frac{1}{n}}) : f(t),$$

dann ist $\vartheta r^{\frac{1}{n}}$ die zwei aufeinanderfolgende Vectorendpunkte verbindende Sehne; ϑr dagegen ist ein Vector in der Richtung dieser Sehne. Es ist aber

$$\vartheta r = [f(t \vartheta t^{\frac{1}{n}}) : f(t)]^n,$$

$$\vartheta^t \log \vartheta r = \frac{l f(t \vartheta t^{\frac{1}{n}}) - l f(t)}{l \vartheta t^{\frac{1}{n}}}.$$

An der Grenze, d. h. wenn n unendlich gross wird, erhalten wir hieraus

$$\vartheta^t \log \vartheta r = \dot{f}(t) = \dot{r},$$

$$\vartheta r = (\vartheta t)^{\dot{f}(t)} = (\vartheta t)^{\dot{r}};$$

und jetzt ist ϑr ein Vector in der Richtung der Tangente. Seine Länge

wird abhängen von dem Werthe, den wir ϑt beilegen. Da nun die Geschwindigkeit auch ein Vector in der Richtung der Tangente ist, so sieht man, dass durch geeignete Wahl von ϑt der Geschwindigkeitsvector ausgedrückt ist durch

$$\vartheta r = (\vartheta t)^{r}.$$

Dass man dabei nicht ϑt gleich der Einheit setzen darf, ersieht man leicht, denn dafür reducirt sich ϑr auf das Quotial von r.

Gehen wir von einer Bewegung des Punktes in einer Geraden aus, und nehmen wir an, dass die Gerade mit gleichmässiger Geschwindigkeit durchlaufen werde, so ist zu setzen

$$r = a^{kt}.$$

Dann ist $$\vartheta r = \vartheta t^{kt \cdot la}.$$

Nun ist $$\vartheta t \log a = la : l\vartheta t,$$

daher $$la = \vartheta t \log a \cdot l\vartheta t.$$

Durch Einführung dieses Werthes erhalten wir

$$\vartheta r = a^{ktl\vartheta t}.$$

Da nun aber aus $r = a^{kt}$ folgt, dass der in der Zeiteinheit in der Richtung von a durchlaufene Weg a^k ist, so muss $l\vartheta t$ gleich t^{-1}, daher $\vartheta t = e^{\frac{1}{t}}$ angenommen werden, damit ϑr die Geschwindigkeit des Punktes nach Grösse und Richtung angiebt.

Für $r = a^{kt^2}$ erhalten wir

$$\vartheta r = \vartheta t^{2kt^2 la} = a^{2kt^2 l\vartheta t}.$$

Setzen wir auch hier $\vartheta t = e^{\frac{1}{t}}$, so wird hieraus

$$v = \vartheta r = a^{2kt},$$

d. h. die Geschwindigkeit ist der Zeit proportional. Die Frage nach dem Zuwachs an Geschwindigkeit in der Zeiteinheit, d. h. nach der Acceleration, führt durch nochmaliges Quotiiren zu

$$\vartheta v = a^{2k};$$

die Acceleration ist also constant.

Nehmen wir endlich als Gleichung die Vectorgleichung des Kreises

$$r = a^{\cos kt} \cdot b^{\sin kt},$$

worin a und b senkrecht zu einander und von der Länge des Radius vorausgesetzt sind, so ist

$$\vartheta r = \vartheta t^{ktl(a^{-\sin kt}\, b^{\cos kt})} = (a^{-\sin kt}\, b^{\cos kt})^{ktl\vartheta t}.$$

Nehmen wir nun hier auch $l\vartheta t = t^{-1}$ an, so erhalten wir

$$\vartheta r = (a^{-\sin kt} \cdot b^{\cos kt})^{k} = v.$$

Der Ausdruck für v stellt einen Vector dar, der senkrecht zum Radius und von kfacher Länge desselben ist. Es ist also der Geschwindigkeitsvector kmal die Länge des Radius, daher von constanter Grösse.

Es ist ferner $$\vartheta v = (a^{\cos kt} \cdot b^{\sin kt})^{-k^2} = r^{-k^2},$$

d. h. die Acceleration bei gleichförmiger Kreisbewegung ist ausgedrückt durch einen Vector, der in der Richtung des Radius aber im entgegengesetzten Sinne wirkt, und ist dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional. Ueberhaupt lässt sich aus diesen Gleichungen folgern $\mathrm{T}v = k \,.\, \mathrm{T}r$, während die Acceleration $\mathrm{T}\varphi = k^2\,\mathrm{T}r$, wo $\mathrm{T}r$ die absolute Länge von r angiebt.

Betrachtet man $\vartheta r = (\vartheta t)^r$

als die Gleichung einer neuen Curve, so hat man damit einen Hodographen in Quotientvectoren.

Drückt man den Quotientvector r einer Curve als Function des Bogens s aus, so lassen sich ähnliche Untersuchungen führen, wie die in §. 55, 10 bei den Differenzvectoren angedeuteten.

Das eigenthümliche Ergebniss der vorstehenden Untersuchung, wonach zur Erlangung der Geschwindigkeit und der Acceleration

$$\vartheta t = e^{\frac{1}{t}}$$

zu setzen ist, lässt sich auch durch folgende Betrachtung begründen.

Wir haben die Geschwindigkeit als einen Vector aufgefasst, der gleichsam in der Zeit ϑt durchlaufen würde. Nun ist aber ϑt kein Additionszuwachs an der Zeit, sondern ein Factor, durch welchen eine Aenderung der Zeit hervorgerufen wird, die

$$t\vartheta t - t$$

zum Werth hat. Dieser Ausdruck ist variabel mit t und entspricht in dieser Beziehung durchaus nicht dem $\triangle t$ der Differentialrechnung. Sollen aber die unendlich kleinen Zuwachse der Zeit, die wir hier durch

$$t\vartheta t^{\frac{1}{n}} - t$$

ausdrücken könnten, dem dt analog sein, so ist es erlaubt

$$t\vartheta t^{\frac{1}{n}} - t = dt = 1 : n$$

zu setzen, woraus sich

$$\vartheta t^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{nt},$$

$$\vartheta t = \left(1 + \frac{1}{nt}\right)^n$$

ergiebt, welcher Ausdruck an der Grenze zu $\vartheta t = e^{\frac{1}{t}}$ führt, demselben Werthe, zu welchem wir auch oben schon gelangt waren.

§. 59. Die Logarithmen der Quotientvectoren.

1. — Nach den Lehren des vorigen Paragraphen ist, wenn ab, bc ... als Quotientvectoren betrachtet werden,

$$ab \,.\, bc \,.\, cb \ldots np = ap.$$

Gehören diese Vectoren einmal alle derselben Richtung an, ist ferner die Länge für alle dieselbe, und werden sie auch alle in demselben Sinne durchlaufen, so erhalten wir

$$a b^n = a p,$$

und hieraus

$$n = \log a p : \log a b = {}^{a b}\log a p.$$

Man kann nun fragen nach einem Ausdruck für ${}^a\log b$, wenn b und a nicht derselben Richtung angehören. Dass dieser Logarithmus kein Scalar sein kann, folgt daraus, dass für jeden Scalarwerth von t die Potenz a^t eine Strecke in der Richtung von a angiebt. Es ist vielmehr ${}^a\log b$ eine Quaternion, weil dieser Logarithmus von denselben vier Bestimmungsstücken abhängig ist, die wir §. 45, 2 als von Einfluss auf den Quotienten der Differenzvectoren $\beta : \alpha$ gefunden haben. Dass aber auch die Form dieses Logarithmus dieselbe ist, wie die jener geometrischen Quotienten, wollen wir im Folgenden kurz nachweisen.

Wir werden hier, ähnlich wie früher, zwei solche Logarithmen

$$\lambda_1 = {}^a\log b, \quad \lambda_2 = {}^c\log d$$

einander gleich setzen, wenn

$$T a : T b = T c : T d;$$

wenn ferner Winkel a b gleich Winkel c d, nach Grösse und Sinn der Drehung, und wenn schliesslich die Ebene a b parallel der Ebene c d ist. Es wird mit anderen Worten $\lambda_1 = \lambda_2$ sein, wenn die Vectoren a, b und c, d entsprechende Seiten von ähnlichen in parallelen Ebenen ähnlich liegenden Dreiecken sind.

2. — Aus ${}^a\log b = \lambda$ folgern wir

$$a^\lambda = b.$$

Es muss daher λ eine doppelte Function erfüllen; dieser Exponent muss a strecken (resp. verkürzen) bis zur Länge von b, und er muss zugleich eine Drehung von a bis in die Richtung von b bewirken. Es kann daher λ gedacht werden als ein Product

$$\lambda = T\lambda \,.\, U\lambda,$$

wovon der Tensor — eine positive Zahl — die Streckung von a erzeugt, der Versor dagegen die Drehung hervorruft. Die früher für Tensor und Versor gemachten Bemerkungen (§. 46) gelten mit geringen Abänderungen auch hier.

Der absolute Werth von $T\lambda$ ist gleich dem positiven Quotienten aus $T b : T a$.

3. — Die Grundrechnungen mit den geometrischen Logarithmen führen immer wieder auf solche Logarithmen. Der Beweis hierfür ergiebt sich ähnlich wie in §. 47 für Quaternionen. Es ist z. B.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = {}^a\log b + {}^c\log d = {}^m\log b_1 + {}^m\log d_1 = {}^m\log b_1 d_1 = {}^m\log e,$$

wenn wir hierbei m in der Schnittlinie der Ebenen a b und c d so annehmen, dass

$$^{a}\log b = {}^{m}\log b_1, \qquad {}^{c}\log d = {}^{m}\log d_1.$$

Ebenso kann man setzen

$$\lambda_1 - \lambda_2 = {}^{m}\log b_1 - {}^{m}\log d_1 = {}^{m}\log (b_1 : d_1) = {}^{m}\log f,$$

$$\lambda_1 \,.\, \lambda_2 = {}^{m}\log b_1 \,.\, {}^{p}\log m = {}^{p}\log b_1,$$

wenn $^{c}\log d = {}^{p}\log m$ ist. Endlich ist

$$\lambda_1 : \lambda_2 = {}^{m}\log b_1 : {}^{m}\log d_1 = {}^{d_1}\log b_1.$$

Dieselben Gründe aber, die wir in §. 47 für die Nichtgiltigkeit des commutativen Principes bei der Multiplication von Quaternionen anführten, gelten auch hier für das Product $\lambda_1 \lambda_2$. Es ist im Allgemeinen $a^{\lambda_1 \lambda_2}$ nicht gleich $a^{\lambda_2 \lambda_1}$, da bei diplanaren Logarithmen die durch $\lambda_1 \lambda_2$ bewirkte Drehung nicht zu demselben Vector führt wie die durch $\lambda_2 \lambda_1$ erzeugte. Wie wir früher nur

$$\frac{\gamma}{\beta} \,.\, \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

setzten, so werden wir auch hier annehmen, dass

$$^{b}\log c \,.\, {}^{a}\log b = {}^{a}\log c,$$

nicht aber, dass

$$^{a}\log b \,.\, {}^{b}\log c$$

zu demselben Werthe führt.

In Bezug auf das associative und das distributive Princip verweisen wir auf die einschlagenden Bemerkungen des fünften Abschnittes, und nehmen also an, wenn wir die jetzigen Quaternionen mit griechischen Buchstaben bezeichnen, dass

$$(\alpha \,.\, \beta)\gamma = \alpha(\beta \,.\, \gamma)$$

$$(\alpha + \beta)\,(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta.$$

4. — Sind a und b senkrecht zu einander, so ist $^{a}\log b = \sqrt{-1}$, wenn a und b Einheitsvectoren sind. Denken wir uns nämlich in der Ebene a b noch einen dritten Vector c von gleicher Länge und so gezogen, dass Winkel a b gleich Winkel b c gleich $^1/_2 \pi$ ist, so haben wir

$$^{a}\log b = {}^{b}\log c = \lambda,$$

daher

$$\lambda^2 = {}^{b}\log c \;\; {}^{a}\log b = {}^{a}\log c = -1,$$

da c in der Rückverlängerung von a gelegen und daher gleich a^{-1} ist. Mithin ist $\lambda = \sqrt{-1}$. Da b in unendlich viel Ebenen auf a senkrecht sein kann, so hat $\lambda = \sqrt{-1}$ unendlich viel Werthe, die wir auch hier mit i_1, i_2 . . . bezeichnen wollen.

Ist b zwar senkrecht zu a, aber nicht von derselben Länge, so ist

$$^{a}\log b = (\mathrm{T}\lambda)\, i.$$

5. — Sind o a, o b und o c die Einheitskanten einer rechten Ecke, wobei jetzt o a, o b, o c als Quotientvectoren gelten, so wollen wir setzen

$$^{o\,b}\log o\,c = i_1, \quad ^{o\,c}\log o\,a = i_2, \quad ^{o\,a}\log o\,b = i_3,$$

oder

$$c = b^{i_1}, \quad a = c^{i_2}, \quad b = a^{i_3}.$$

Dann ergiebt sich hieraus

$$(b^{i_1})^{i_2} = b^{i_2\,i_1} = c^{i_2} = a = b^{-i_3},$$

mithin

$$i_2\,i_1 = -\,i_3.$$

Ebenso ist

$$(c^{i_2})^{i_3} = c^{i_3\,i_2} = a^{i_3} = b = c^{-i_1},$$

also

$$i_3\,i_2 = -\,i_1.$$

Endlich ist

$$(a^{i_3})^{i_1} = a^{i_1\,i_3} = b^{i_1} = c = a^{-i_2},$$

oder

$$i_1\,i_3 = -\,i_2.$$

Es ist aber auch aus

$$c^{-i_1} = b \quad \text{und} \quad a^{-i_2} = c,$$

$$a^{-i_1\,i_2} = c^{i_1} = b^{-1} = a^{-i_3},$$

folglich

$$i_1\,i_2 = i_3.$$

Aehnlich findet man noch

$$i_2\,i_3 = i_1 \quad \text{und} \quad i_3\,i_1 = i_2.$$

Wir gelangen also zu denselben Relationen zwischen den drei Versoren i_1, i_2 und i_3, die wir früher §. 48, 2 aufstellten.

6. — Bezeichnen wir auch hier eine im Scheitel des Winkels ab auf die Ebene ab senkrecht gestellte Gerade als die Axe von $^a\log b$, so führen Betrachtungen, ähnlich den in §. 49 angestellten, dazu, dass wenn man auf dieser Axe eine Länge abgetragen denkt, die gleich dem Tensor von $^a\log b$ ist, diese Länge ausreicht um $^a\log b$ unzweideutig festzustellen, falls wir noch eine Annahme in Bezug auf die Grösse des Winkels ab machen. Lassen wir diesen Winkel einen rechten sein, so reicht der auf der Axe abgetragene Tensor, den wir jetzt den Index des Logarithmus nennen, vollständig zur Bestimmung dieses Werthes aus. Als welche Art Vector ist aber dieser Index anzusehen, als Differenz- oder Quotientvector? Diese Frage erhält dadurch ihre Lösung, dass, wie wir sehen werden, der Index an die Stelle des Logarithmen treten kann, indem wir geradezu definiren, dass $^a\log b = \mathrm{I}(^a\log b)$ ist. Soll aber diese Gleichung einen praktischen Werth haben, so muss sich nachweisen lassen, dass

$$\mathrm{I}\lambda_1 \pm \mathrm{I}\lambda_2 = \mathrm{I}(\lambda_1 \pm \lambda_2),$$

$$\mathrm{I}\lambda_1 : \mathrm{I}\lambda_2 = \lambda_1 : \lambda_2,$$

und

$$\mathrm{I}\lambda_1 \,.\, \mathrm{I}\lambda_2 = \lambda_1 \,.\, \lambda_2.$$

Dieser Nachweis lässt sich in der That führen, wenn die Indices als Differenzvectoren gelten, deren Addition und Subtraction nach dem Parallelogramm der Vectoren erfolgt, deren Producte und Quotienten aber die früher hergeleiteten Quaternionen sind.

Das Ergebniss, dass der Logarithmus eines Quotientvectors in Bezug

auf einen dazu senkrechten Vector ein dritter zu beiden senkrechter Differenz-Vector ist, hat nicht bloss um der Einfachheit des Resultates willen ein hohes Interesse, sondern noch viel mehr dadurch, dass wir so von den Quotientvectoren auf das Gebiet der Differenzvectoren gelangen, von welchen sich nun alle die Rechnungsgesetze auch hier ableiten lassen, die wir in dem vorigen Abschnitte als für dieselben giltig gezeigt haben.

7. — Auch $^{a}\log b$ lässt sich in Scalar- und Vectortheil zerlegen. Setzen wir nämlich in der Ebene a b b gleich $b_1 . b_2$, wo b_1 in die Richtung von a fällt, b_2 aber senkrecht zu a gerichtet ist, so haben wir

$$^{a}\log b = {}^{a}\log (b_1 . b_2) = {}^{a}\log b_1 + {}^{a}\log b_2 = \cos a b + i \sin a b,$$

wenn wir a und b Einheitsvectoren sein lassen. Andernfalls ist dieser Ausdruck noch mit $T\lambda$ zu multipliciren. Man kann für den allgemeinen Fall auch hier

$$\frac{Tb}{Ta} . \cos a b = S\lambda,$$

$$\frac{Tb}{Ta} . \sin a b . i = V\lambda$$

setzen und hat damit für den Logarithmus von Vectoren

$$\lambda = \frac{Tb}{Ta} (\cos a b + i \sin a b) = S\lambda + V\lambda,$$

d. h. eine Summe aus Scalar- und Vectortheil. Dabei ist $S\lambda$ eine Zahl, $V\lambda$ dagegen ein auf der Ebene a b senkrechter Differenzvector.

8. — Auch die viergliedrige Form für $^{a}\log b$ lässt sich jetzt leicht ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} ^{a}\log b &= {}^{a}\log (b_1 . b_2) = {}^{a}\log b_1 + {}^{a}\log b_2 \\ &= S\,{}^{a}\log b + V\,{}^{a}\log b. \end{aligned}$$

Den Vectortheil, dessen Länge $(Tb : Ta) . \sin a b$ ist, kann man nun nach drei rechtwinkligen Axen zerlegen in

$$x i_1, \quad y i_2, \quad z i_3,$$

so dass wir also haben

$$^{a}\log b = w + x i_1 + y i_2 + z i_3.$$

Das Vorstehende mag ausreichen zur Begründung des Satzes, dass der Logarithmus eines Quotientvectors b für einen zweiten a als Basis gleich der Quaternion aus den zwei Differenzvectoren β und α ist, welche nach Grösse und Richtung mit b und a identisch sind.

9. — Um auch eine Anwendung der letzten Lehren zu zeigen, wollen wir mit ihrer Hilfe die Grundgleichungen der ebenen Trigonometrie ableiten.

Es ist im Dreiecke a b c

$$a c = a b . b c,$$

daher
$$1 = {}^{ac}\log ab + {}^{ac}\log bc$$
$$= \frac{Tab}{Tac} \cdot [\cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)]$$
$$+ \frac{Tbc}{Tac} \cdot (\cos\gamma + i \sin\gamma),$$

wo i ein zur Ebene abc senkrechter Einheitsvector ist.

Hieraus ergiebt sich aber

$$Tac = Tab \cdot (\cos\alpha - i\sin\alpha) + Tbc\,(\cos\gamma + i\sin\gamma),$$

oder $Tac = Tab \cdot \cos\alpha + Tbc \cdot \cos\gamma,$

und $0 = -Tab \cdot \sin\alpha \cdot i + Tbc \cdot \sin\gamma \cdot i.$

Diess sind aber die bekannten Sätze

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha,$$
$$a\sin\gamma = c\sin\alpha.$$

Um für den Kreis zu zeigen, dass die Tangente senkrecht zum Radius sei, folgern wir aus der Gleichung des Kreises (vergl. §. 58, 14)

$$r = a^{\cos t}\, b^{\sin t},$$
$$\vartheta r = a^{-\sin t} \cdot b^{\cos t},$$
$${}^{r}\log \vartheta r = \frac{l\vartheta r}{lr} = \frac{-\sin t \cdot la + \cos t \cdot lb}{\cos t \cdot la + \sin t \cdot lb}$$
$$= \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi + t) + \sin(\frac{1}{2}\pi + t) \cdot (lb : la)}{\cos t + \sin t\,(lb : la)}.$$

Nun ist $lb : la = {}^{a}\log b = i$, weil wir b senkrecht zu a vorausgesetzt haben. Daher

$${}^{r}\log \vartheta r = \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi + t) + i\sin\frac{1}{2}(\pi + t)}{\cos t + i\sin\frac{1}{2}t}$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\pi = i.$$

Mithin ist ϑr, ein Vector in der Richtung der Tangente, senkrecht zu dem Radius r des Berührungspunktes.

Ist in der obigen Gleichung a nicht senkrecht zu b, so stellt dieselbe eine Ellipse dar, und man erhält dann in ${}^{r}\log \vartheta r$ einen Ausdruck, der zur Bestimmung des Winkels dienen kann, welchen die Tangente mit dem Vector des Berührungspunktes bildet.

§. 60. Die Summen und Differenzen paralleler Differenzvectoren.

1. — Die von Möbius zuerst eingeführte geometrische Addition von Vectoren betrachtet Strecken als gleich, wenn dieselben der Grösse und Richtung nach übereinstimmen. Gleichgerichtete Vectoren von derselben Länge sind daher gleichwerthig, auch wenn sie an ganz verschiedenen Stellen im Raume sind. Dass diese Betrachtung von Nutzen sein kann,

beweisen die zahlreichen Anwendungen, die man von dieser Additionsmethode gemacht hat, beweist namentlich die Hamilton'sche Quaternionentheorie, welche dieselbe Annahme zu Grunde legt.

Dass aber mit der Voraussetzung der Identität von gleichgerichteten längengleichen Strecken dem Wesen dieser geometrischen Gebilde nicht völlig entsprochen wird, bedarf kaum eines Nachweises, indem ja zur vollständigen Bestimmung eines Vectors seine Stelle im Raume von derselben Wichtigkeit sein kann, wie seine Richtung. Lassen wir z. B. die Vectoren Kräfte darstellen, statt einfacher Translationen, so kann von einer Identität gleicher parallelen Kräfte, die auf ein Punktsystem wirken, oder von einer willkürlichen Verlegung ihrer Angriffspunkte, die ja bei absoluter Gleichwerthigkeit zulässig sein müsste, gar nicht die Rede sein. Dagegen ist die Richtung solcher parallelen Vectoren für gewisse Untersuchungen ganz gleichgiltig; ich erwähne nur die Ermittelung des Angriffspunktes der Resultante paralleler Kräfte.

Wir wollen daher im Folgenden versuchen, eine Theorie der Rechnung mit parallelen Vectoren aufzustellen. Dieselbe wird, von einfachen Sätzen ausgehend, sich schliesslich als eine Ergänzung der Hamilton'schen Quaternionentheorie herausstellen. Hamilton verbindet Vectoren, die von demselben Punkte ausgehen, aber verschiedene Richtungen haben; wir legen Vectoren derselben Richtung zu Grunde, die aber in verschiedenen Punkten des Raumes ihren Anfang nehmen. Schliesslich ergiebt sich dann die Möglichkeit, Vectoren auf einander zu beziehen, die nach Anfang und Richtung verschieden sind.

Vorläufig betrachten wir parallele Differenzvectoren, während später den parallelen Quotientvectoren noch eine kurze Untersuchung gewidmet werden wird.

Dass die Rechnung mit parallelen Differenzvectoren, so viel dem Verfasser bekannt, nicht schon früher versucht wurde, lag vielleicht mit an dem Mangel einer Theorie der longimetrischen Functionen, welche hier eine ähnliche wichtige Rolle spielen, wie die goniometrischen Functionen bei den Hamilton'schen Quaternionen.

2. — Indem wir von nun an Differenzvectoren als ungleichwerthig annehmen, selbst bei gleicher Länge und Richtung, wenn sie ihre Anfangspunkte an verschiedenen Stellen im Raume haben, definiren wir als Summe der parallelen Vectoren α und β den zu ihnen parallelen Vector γ, dessen Anfang c den Abstand ab der Anfänge von α und β im umgekehrten Verhältniss der Längen von α und β theilt, so dass also

$$ac : cb = T\beta : T\alpha,$$

während die Länge von γ sich aus den Längen von α und β einfach zusammensetzt, wenn die Summanden gleichstimmig parallel sind.

Sind α und β ungleichstimmig parallel, so behält vorstehende Erklärung der Summe von α und β doch ihre Giltigkeit, es müssen nur die Vectoren mit ihren Vorzeichen eingeführt werden. Man erhält also in diesem Falle für $T\gamma$ den Werth $T\alpha - T\beta$, während sein Anfang c den Abstand ab im Verhältniss von $-\beta : \alpha$, d. h. äusserlich theilt. Die Richtung von γ ist dabei gleichstimmig parallel mit dem grösseren der beiden Vectoren.

Der Fall, dass α und β von gleicher Länge aber entgegengesetzt parallel sind, führt zu einem im Unendlichen liegenden Vector von der Länge Null. Ueber die Bedeutung solcher Differenzen gleicher Vectoren erhält man Aufschluss, wenn man dieselben zu einem dritten parallelen Vector addirt. Ist z. B. gegeben der Vector α im Punkte a und die parallelen und gleichen, aber entgegengesetzten Vectoren β und $-\gamma$, die ihre Anfänge in b und c haben, so lässt sich erst α mit β zusammensetzen zu δ im Punkte b, und sodann δ mit $-\gamma$ zu ε im Punkte e, wobei die Länge von ε gleich der von α ist. Es ist aber

$$T\alpha \,.\, ab = T\beta \,.\, bb \quad \text{und} \quad T\delta \,.\, be = T\gamma \,.\, ce,$$

und hieraus lässt sich zur Ermittelung der Lage von e der Satz aufstellen

$$T\alpha \,.\, ae = T\beta \,.\, bc;$$

zugleich findet man, dass ae parallel bc ist. Es wird also durch Addition einer solchen Differenz $\beta - \gamma$ ein Vector α verschoben parallel der Verbindungslinie der Anfänge von β und γ, aber ohne dass die Grösse des Vectors α dadurch geändert wird. Der Werth des Paares, wie man eine solche Verbindung nennen kann, ist, wie die letzte Gleichung zeigt, dem Product aus der Länge eines seiner Elemente und dem Abstand der Anfänge proportional.

Man könnte diese Paare als neue geometrische Elemente in die Untersuchung einführen, welche nur eine Verschiebung der Vectoren bewirken, ohne deren Grösse zu ändern. Die Analogie mit den Rotationspaaren der Kinematik liegt übrigens klar vor; wir brauchen nur die parallelen Vectoren als Vertreter von Rotationsgeschwindigkeiten um parallele Axen zu betrachten, so gelangen wir ganz zu denselben Resultaten wie oben.

3. — Man kann nun auch umgekehrt einen Vector γ in c zerlegen in zwei andre zu γ parallele α und β, deren Anfänge a und b mit c in einer Geraden und so liegen, dass

$$ac : cb = T\beta : T\alpha,$$

während $T\alpha + T\beta = T\gamma$ ist. Dabei können α und β beide gleichstimmig parallel zu γ sein, oder der grössere Vector ist gleichstimmig, der andere ungleichstimmig parallel. Im ersten Falle liegen α und β auf entgegengesetzten Seiten von γ, im letzteren auf derselben. In jedem Falle aber ist

$$T\alpha = T\gamma \,.\, \mathrm{Cos}\, c, \qquad T\beta = T\gamma \,.\, \mathrm{Sin}\, c,$$

wenn man die longimetrischen Functionen von c auf $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ als Basis bezieht.

Leicht nachweisbar ist auch, dass eine von dem willkürlichen Punkte $\mathfrak{o}$ der Ebene $\alpha\beta$ gezogene Transversale, welche α, β, γ in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ trifft, Stücke ergiebt, für welche die Gleichung gilt

$$T\alpha \,.\, \mathfrak{o}\mathfrak{a}_1 + T\beta \,.\, \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1 = T\gamma \,.\, \mathfrak{o}\mathfrak{c}_1.$$

Es ist diess die erweiterte Momentengleichung der Statik für zwei parallele Kräfte und ihre Resultirende. Mit ihrer Hilfe lässt sich $\mathfrak{o}\mathfrak{c}_1$ aus $\mathfrak{o}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{b}_1$ ermitteln.

Für drei parallele Vectoren α, β, γ derselben Ebene ist die Summe δ so gelegen, dass auf einer beliebigen, von dem Punkte $\mathfrak{o}$ ihrer Ebene ausgehenden Transversalen Stücke abgeschnitten werden, für welche

$$T\delta \,.\, \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1 = T\alpha \,.\, \mathfrak{o}\mathfrak{a}_1 + T\beta \,.\, \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1 + T\gamma \,.\, \mathfrak{o}\mathfrak{c}_1$$

ist. Durch Umänderung der gemeinschaftlichen Richtung der Vectoren in eine neue gemeinsame Richtung ergiebt sich eine zweite solche Gleichung, die im Verein mit der ersten und mit

$$T\delta = T\alpha + T\beta + T\gamma$$

ausreicht, um δ nach Lage und Grösse zu bestimmen. Dasselbe gilt bei mehr als drei parallelen Vectoren derselben Ebene.

4. — Für drei parallele Vectoren α, β, γ, die nicht in derselben Ebene sind, hat die Summe δ ihren Anfang in einem Puncte $\mathfrak{d}$ des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, der so liegt, dass

$$T\alpha = T\delta \,.\, \mathrm{Cos}_1\, \mathfrak{d}, \quad T\beta = T\delta \,.\, \mathrm{Cos}_2\, \mathfrak{d}, \quad T\gamma = T\delta \,.\, \mathrm{Cos}_3\, \mathfrak{d},$$

wobei die Cosinusse die Planfunctionen von $\mathfrak{d}$ in Bezug auf das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ sind. Da $T\delta$ selbst der Summe der Tensoren von α, β und γ gleich ist, so lässt sich aus diesen Gleichungen die Lage von $\mathfrak{d}$ bestimmen.

Ein Vector δ kann umgekehrt in drei andre zu ihm parallele Vectoren α, β, γ zerlegt werden, deren Anfänge $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit dem Anfang $\mathfrak{d}$ von δ in einer Ebene liegen. Die Längen der Theile sind dann durch die vorstehenden Gleichungen bestimmt.

Sind vier parallele Vectoren gegeben, so ist deren Summe

$$\varrho = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

so gelegen, dass

$$T\varrho \,.\, \mathrm{Cos}_1\, \mathfrak{r} = T\alpha, \quad T\varrho \,.\, \mathrm{Cos}_2\, \mathfrak{r} = T\beta, \quad T\varrho \,.\, \mathrm{Cos}_3\, \mathfrak{r} = T\gamma, \quad T\varrho \,.\, \mathrm{Cos}_4\, \mathfrak{r} = T\delta,$$

wenn $\mathfrak{r}$ der Anfang von ϱ und die Raumcosinusse auf das Tetraeder $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ bezogen sind. Umgekehrt lässt sich jeder Vector ϱ in vier Theilvectoren zerlegen, die ihre Anfänge in den Eckpunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ haben, und deren Grössen durch vorstehende Formeln bestimmt sind.

Um n parallele Vectoren zu addiren, deren Anfänge in beliebigen Punkten des Raumes liegen, zerlegt man jeden derselben in vier Theilvectoren, die ihre Anfänge in den Eckpunkten eines Grundtetraeders $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$

haben. Aus den Summen ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c und ϱ_d der in den vier Ecken befindlichen Theilvectoren lässt sich nun leicht Stelle und Grösse der Gesammtsumme ϱ finden.

5. — Für die im Vorstehenden betrachtete Addition und Subtraction paralleler Vectoren gelten, wie man sich leicht überzeugt, das commutative und das associative Princip, indem sowol

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

als auch $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ist. Ueberdiess ist die gewöhnliche Addition von Strecken nur ein besonderer Fall der von uns hier betrachteten Summirung, nämlich der, dass die Strecken derselben Richtung angehören und von demselben Punkte ausgehen.

6. — Die Lehre von der Addition paralleler Vectoren gestattet Verwendung bei geometrischen Untersuchungen, wie wir an einigen Beispielen zeigen wollen.

Bezeichnen wir mit x und y Zahlencoefficienten, so sind $x\alpha$ und $y\beta$ neue, in ihren Anfängen und Richtungen mit den Anfängen und der Richtung von α und β zusammenfallende Vectoren von x- resp. y-facher Länge der Vectoren α und β. Es ist daher

$$\varrho = x\alpha + y\beta$$

ein neuer zu α und β paralleler Vector, dessen Anfang und Grösse durch vorstehende Gleichung bestimmt ist. Durch richtige Annahme von x und y kann man nach Grösse und Stelle den Vector ϱ eines jeden Punktes in der Ebene $\alpha\beta$ erhalten, wenn wir diese ϱ parallel zu α und β sein lassen, und wenn dieselben zugleich alle ihren Anfang auf der durch a und b gehenden Geraden haben.

Findet zwischen x und y eine gewisse Relation statt, so erhält man bei stetiger Aenderung des x eine Folge von Punkten, die eine ebene Curve bilden.

Ist z. B. (vergl. §. 19, 2)

$$(x + y)^2 = bx + ay,$$

so stellt

$$\varrho = x\alpha + y\beta$$

die Gleichung einer Geraden dar.

Dagegen ist

$$(x + y)^4 = 4r^2xy$$

die Gleichung zwischen x und y, damit

$$\varrho = x\alpha + y\beta$$

eine Kreislinie ergiebt.

Setzt man

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

worin α, β und γ drei nicht in einer Ebene liegende parallele Vectoren sind, so ist ϱ ein vierter Vector, dessen Anfang in der Ebene abc der

Anfangspunkte von α, β und γ liegt. Durch geeignete Wahl von x, y und z lässt sich so der Vector eines jeden Punktes finden. Sind dabei diese drei Coefficienten die Functionen von einer oder zwei unabhängig Variabeln, so stellt die Folge der sich dadurch ergebenden Punkte eine räumliche Curve oder eine Fläche dar.

7. — Die complicirten Ausdrücke, die wir übrigens erhalten, wenn wir auf diese Weise die Gleichungen von Curven oder Flächen aufstellen, müssen uns darauf hinweisen, diese Vectoren ϱ als Vertreter andrer Gebilde als ihrer Endpunkte aufzufassen. Betrachten wir in der That einen in der Ebene der Vectoren α und β gelegenen Vector ϱ als Repräsentanten einer Geraden, und zwar derjenigen Geraden, für welche die Axenabschnitte auf den durch α und β gehenden Parallelaxen (vergl. §. 20) gleich den longimetrischen Projectionen von ϱ auf diese Axen sind, so haben wir damit die Grundlagen einer Untersuchung der Geometrie der Geraden gewonnen. Schneidet umgekehrt eine Gerade m auf den Parallelaxen die Stücke x und y ab, so betrachten wir diese Coordinaten als die Projectionen eines Vectors ϱ, der so liegt, dass

$$T\varrho \,.\, \mathrm{Cos}\, \mathfrak{m} = x, \qquad T\varrho \,.\, \mathrm{Sin}\, \mathfrak{m} = y,$$

den man also leicht aus x und y construiren kann. Derselbe theilt den Abstand der Axen im umgekehrten Verhältniss der Coordinaten und hat zur Länge die Summe $x + y$. Dagegen endet er nicht auf der Geraden, und man kann, will man noch einen anderen Zusammenhang zwischen ihm und der Geraden haben, ihn auffassen als einen Ausdruck für die doppelte Fläche des Trapezes, welches die Gerade m mit den Axen und der Mittellinie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bildet, falls die Axen senkrecht sind zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und letztere Strecke gleich der Einheit ist. (Vergl. §. 32, 5.)

Es stellt also, wenn wir jetzt x und y die Masszahlen der Coordinaten sein lassen,

$$\varrho = x\alpha + y\beta$$

die Gerade dar, die auf α und β die Längen $x\alpha$ und $y\beta$ abschneidet. Dass damit die Mittel gegeben sind zur Festlegung jeder Geraden in der Ebene $\alpha\beta$, ist klar. Ueberdiess sieht man leicht ein, dass

$$\varrho = x\alpha + (1 - x)\,\beta$$

die Gleichung eines Punktes ist, während, bei gleicher Länge von α und β,

$$\varrho = x\alpha \pm \frac{b^2}{x}\,\beta$$

die Gleichung einer Ellipse oder einer Hyperbel ergiebt, und dass endlich

$$\varrho = x\alpha + y\beta$$

die Gleichung der drei Kegelschnitte in Tangentenelementen darstellt, wenn für x und y die Gleichung besteht (vergl. §. 29, 4)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dabei sind die genannten Curven natürlich als die Umhüllenden der durch ϱ dargestellten Geraden oder Tangenten aufzufassen.

8. — Ist die Gleichung einer Curve in solchen Tangentenvectoren, wie wir ϱ ja hier nennen können, gegeben, so lässt sich auch leicht die Gleichung des Berührungspunktes einer Tangente finden. Es sei

$$\varrho_1 = x_1 \alpha + y_1 \beta$$

der Vector der Tangente $x_1 y_1$, und $\varrho_1 + \triangle \varrho_1$ der Vector einer benachbarten Tangente. Dann ist

$$\tau = \varrho_1 (1-z) + (\varrho_1 + \triangle \varrho_1) z = \varrho_1 + z \triangle \varrho_1$$

die Gleichung des Schnittpunktes dieser beiden Tangenten. Sind nun x und y beide Functionen von t, so können wir auch setzen

$$\tau = \varrho_1 + z . \frac{\triangle \varrho_1}{\triangle t} . \triangle t.$$

An der Grenze wird diess die Gleichung des Berührungspunktes, und zwar ist jetzt

$$\tau = \varrho_1 + z . \varrho'_1,$$

wenn wir das Product aus $z . \triangle t$ an der Grenze wieder mit z bezeichnen,

So ist z. B. für die Kegelschnitte, deren Gleichung

$$\varrho = x \alpha + \frac{k}{x} \beta,$$

$$\tau = x_1 \alpha + \frac{k}{x_1} \beta + z (\alpha - \frac{k}{x_1^2} \beta)$$

$$= (x_1 + z) \alpha + \frac{k}{x_1} \left(1 - \frac{z}{x_1}\right) \beta$$

die Gleichung des Berührungspunktes der Tangente $x_1 y_1$. Wird hierin z gleich x_1 gesetzt, so erhält man $\tau = 2 x_1 \alpha$, d. h. die von dem Anfangspunkt von β durch den Berührungspunkt gezogene Sehne schneidet auf der Axe der α das Doppelte des Stückes ab, das die Tangente dort bildet; womit ein leichtes Mittel gegeben ist zur Auffindung der Tangente bei gegebenem Berührungspunkte, oder des Berührungspunktes, wenn die Tangente bekannt ist.

9. — Auch für drei nicht in einer Ebene liegende parallele Vectoren kann

$$\varrho = x \alpha + y \beta + z \gamma$$

betrachtet werden als Repräsentant der Ebene, die auf den drei parallelen Axen die Stücke $x\alpha$, $y\beta$ und $z\gamma$ abschneidet. Diese Coordinaten der Ebene können wieder als longimetrische Projectionen von ϱ auf die Richtungen von α, β und γ aufgefasst werden. Der Endpunkt von ϱ liegt nicht in der zugehörigen Ebene, dagegen ist $^1/_3 \varrho$ ein Mass für den prismatischen Pfeiler, welcher $x\alpha$, $y\beta$ und $z\gamma$ zu Kanten hat (vergl. §. 32, 5), falls man das Dreieck abc als Flächeneinheit betrachtet.

Besteht zwischen x, y und z eine Gleichung, so umhüllen die durch ϱ dargestellten Ebenen im Allgemeinen eine Fläche. So ist, wenn

$$xy + yz + zx = k^2,$$

diese Fläche vom zweiten Grade und wird zu einer Kugelfläche, falls die Anfänge von α, β und γ in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen, dessen Seiten $2k$ sind, während die Axen senkrecht auf der Ebene dieses Dreiecks stehen.

10. — Sind die von den Tangenten einer Curve auf den Axen gebildeten Abschnitte als Functionen der Zeit gegeben, so dass

$$\varrho = F(t) = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta,$$

so ist

$$\varrho' = F'(t) = f'_1(t)\alpha + f'_2(t)\beta,$$

und es kann ϱ' nun als der Vector einer neuen Geraden aufgefasst werden. Da aber (nach §. 32, 5 u. 6) $f'_1(t) = V_x$, $f'_2(t) = V_y$, und da die absolute Länge von ϱ' gleich der Summe dieser beiden Ausdrücke ist, so stellt ϱ' die Flächengeschwindigkeit unsrer Geraden dar. Es ist also $\varrho' = F'(t)$ die Gleichung des Hodographen der die Curve einhüllenden Tangenten. Ebenso ist $\varrho'' = F''(t)$ ein Ausdruck für die Streifenacceleration bei der Bewegung der Tangenten der Curve.

Ist

$$\varrho = F(t) = f_1(t)\alpha + f_2(t)\beta + f_3(t)\gamma$$

eine Gleichung für die ein geometrisches Gebilde einhüllenden Ebenen, so lassen sich in ϱ' und ϱ'' Ausdrücke für die Prismengeschwindigkeit und für die Acceleration bei der Bewegung der Tangentialebenen herleiten.

§. 61. Die Quotienten paralleler Differenzvectoren.

1. — In seinen Untersuchungen über Quaternionen spricht Hamilton mehrfach den Satz aus, dass der Quotient paralleler Differenzvectoren ein Scalar, d. h. eine (reelle) Zahl, die Verhältnisszahl ihrer Längen sei. Diese Behauptung bleibt so lange richtig, als man von der Lage paralleler Vectoren gegen einander ganz absieht und parallele Strecken von derselben Länge und Richtung als völlig gleichwerthig betrachtet. Ebensowenig aber wie zwei verschiedene Radien desselben Kreises für die Hamilton'sche Quaternionentheorie identisch sind, ebensowenig brauchen z. B. die Seiten eines Cylinders mit der Axe dieses Gebildes als gleichwerthig aufgefasst zu werden; und solche gleich lange und gleich gerichtete Vectoren sind jedenfalls durch ihre Lage verschiedenwerthig, wenn sie etwa als Vertreter von Kräften auftreten.

Sobald aber die relative Lage zweier parallelen Vectoren mit in Betracht gezogen wird, kann der Quotient des einen durch den anderen nicht eine einfache Zahl sein; es muss sich vielmehr nachweisen lassen,

dass dieser Quotient aus zwei Theilen besteht, einem Strecker und einem Schieber, wovon der erste das Verhältniss der Längen der Vectoren angiebt, der andre von dem Abstand der Anfangspunkte der Glieder des Quotienten abhängt. Dass dieser Abstand berücksichtigt werden muss, und zwar nach Grösse und Richtung, geht daraus hervor, dass sonst ja die Seiten eines geraden Cylindermantels dividirt durch seine Axe alle denselben Quotienten ergeben würden; was dann wieder umgekehrt zur Folge hätte, dass das Product aus diesem Quotienten in seinen Divisor zu einem unendlich vieldeutigen Resultat führte. Wollen wir diess nicht, so muss der Abstand paralleler Vectoren — wie man den Abstand der Anfangspunkte dieser Vectoren hier kurz nennen kann — als wesentlich für ihren Quotienten gelten.

Wir können daher vier Stücke als von Einfluss auf den geometrischen Quotienten paralleler Differenzvectoren aufzählen: das Längenverhältniss der Vectoren, die Länge ihres Abstandes, sowie endlich die durch zwei Stücke bestimmbare Richtung dieses Abstandes. Wir dürfen mithin auch erwarten, dass der genannte Quotient zu neuen Quaternionen führen wird. In der That wird es uns gelingen, den Quotienten $\beta : \alpha$ darzustellen in der Form

$$(\mathrm{T}\beta : \mathrm{T}\alpha)\ (\mathrm{Cos}_0\, \mathfrak{b} + \mathrm{j}_1 \mathrm{Cos}_1\, \mathfrak{b} + \mathrm{j}_2 \mathrm{Cos}_2\, \mathfrak{b} + \mathrm{j}_3 \mathrm{Cos}_3\, \mathfrak{b}),$$

ein Ausdruck, welcher neben den Tensoren von β und α noch die Verschiebungsfactoren j_1, j_2 und j_3, sowie die Raumfunctionen des Anfangspunktes $\mathfrak{b}$ von β in Bezug auf ein Tetraeder $\mathfrak{a}_0\, \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{a}_3$ enthält, in dessen Scheitel $\mathfrak{a}_0$ der Vector α seinen Anfang hat.

2. — Bezeichnen wir den Quotienten der parallelen Differenzvectoren β und α mit q, so dürfen wir auch hier annehmen, dass

$$\beta = \mathrm{q} \,.\, \alpha;$$

wir legen also diesem geometrischen Quotienten die Eigenschaft bei, durch Multiplication den Vector α nach Grösse und Lage in den parallelen Vector β zu verwandeln. Dabei wird der Vector α gestreckt (oder verkürzt), bis er die Länge von β erreicht, und überdiess parallel verschoben, bis sein Anfang in den Anfangspunkt von β fällt. Wir werden uns daher auch hier q zusammen gesetzt denken müssen aus den Factoren Tq und Uq, von denen der erstere — der Tensor — die Streckung bewirkt, während der letztere — der Versor — die Ortsveränderung herbeiführt. Es ist also

$$\beta : \alpha = \mathrm{q} = \mathrm{Tq} \,.\, \mathrm{Uq} = \mathrm{Uq} \,.\, \mathrm{Tq},$$

wobei die Vertauschung von Tensor und Versor als erlaubt angenommen wird, da die Operationen des Streckens und Verschiebens in beliebiger Aufeinanderfolge vorgenommen werden können.

Der Tensor ist das Längenverhältniss der Vectoren β und α, also

$T\beta : T\alpha$, dieses Mal aber mit Rücksicht auf den Sinn der Richtungen von β und α. Er ist also nicht wie bei den Hamilton'schen Quaternionen eine zeichenlose Zahl, sondern kann die Zeichen plus und minus haben. Da nun das Zeichen minus auf eine Drehung um zwei Rechte deutet, so lässt sich vermuthen, dass der Tensor auch selbst zu einer goniometrischen Quaternion werden kann, wie diess die Biquaternionen noch zeigen werden.

Dagegen ist der Versor hier eine zeichenlose Zahl, der zwar Verschiebungen bewirkt, für den aber Ortsveränderungen in entgegengesetzter Richtung nicht durch das Vorzeichen sondern durch Exponenten mit entgegengesetztem Zeichen ausgedrückt werden, wie diess die Untersuchung bald ergeben wird. Der Versor misst zugleich den geradlinigen Abstand der Anfänge von α und β, und es können daher diese neuen Quaternionen longimetrische genannt werden, zumal es uns auch gelingen wird, dieselben mit Hilfe longimetrischer Functionen in Summen zu zerlegen. Die Hamilton'schen Quaternionen haben wir zur Unterscheidung schon früher als goniometrische Quaternionen bezeichnet.

Wir können also jetzt eine longimetrische Quaternion definiren als einen Multiplicationsoperator, der einen Differenzvector nach Angabe seines Tensors streckt und durch seinen Versor in eine parallele Lage verschiebt. Es wird sich bald zeigen, dass wir auch hätten sagen können, die Verschiebung erfolge um die Länge des Versors.

3. — Zwei Quaternionen q_1 und q_2 werden wir als einander gleich ansehen, wenn dieselben einen Vector μ in demselben Verhältnisse strecken und um gleiche Längen in derselben Richtung verschieben; es muss also $Tq_1 = Tq_2$ und $Uq_1 = Uq_2$ sein. Daraus folgt, wenn die Vectorglieder jener geometrischen Quotienten α_1 und β_1, α_2 und β_2, die Abstände derselben dagegen $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ sind, dass zur Gleichheit von q_1 und q_2 es nöthig ist, dass

$$T\alpha_1 : T\beta_1 = T\alpha_2 : T\beta_2,$$

und dass $a_1 b_1$ gleich und gleichstimmig parallel mit $a_2 b_2$ sein muss.

Von den Stücken, die in $q = \beta : \alpha$ von Einfluss sind, müssen Grösse und Richtung des Abstandes der Anfänge der parallelen Vectoren, — welchen Abstand wir den Abstand der Quaternion nennen wollen — ungeändert bleiben, wenn die Quaternion ihren Werth nicht ändern soll; ebenso muss $T\beta : T\alpha$ dieselbe positive oder negative Zahl sein. Dagegen können die absoluten Längen der parallelen Vectoren, ihre gemeinschaftliche Richtung und die absolute Lage des Abstandes im Raum sich vielfach ändern, ohne dass dadurch der Werth der Quaternion geändert wird. Es ergeben daher z. B. je zwei parallele Radien zweier excentrischen

Kugelflächen dieselbe Quaternion, während jede Seite eines geraden Cylindermantels mit seiner Axe eine andre Quaternion liefert.

In dem Vorstehenden sind auch die Mittel gegeben, um zwei Quaternionen so umzuwandeln, dass sie gleiche Zähler oder gleiche Nenner erhalten.

Als eigenthümliche Fälle der longimetrischen Quaternionen erwähnen wir folgende. Haben α und β gleiche Länge, so wird der Tensor zu eins, und die Quaternion reducirt sich auf ihren Versor. Fallen dagegen die Anfänge zusammen, so wird der Versor zu eins, und die Quaternion wird zum Tensor.

Fällt die gemeinschaftliche Richtung von α und β zusammen mit der des Abstandes, so bewirkt die Quaternion ein Verschieben in der Richtung der Vectoren. Nähern sich α und β beide der Grenze Null oder Unendlich, so ist die Quaternion der Quotient zweier Punkte oder zweier unbegrenzten Strahlen, und es muss dann zur Bestimmung des Tensors noch das Gesetz gegeben sein, nach welchem die Vectoren in diese Grenzwerthe übergehen.

§. 62. Die Grundrechnungen mit longimetrischen Quaternionen.

1. — Das Resultat der Verbindung zweier longimetrischen Quaternionen durch eine der vier Grundrechnungen ist immer wieder eine solche Quaternion, wie wir diess im Nachstehenden zeigen werden. Es ist

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

wenn wir ε so annehmen, dass

$$\mathrm{T}\alpha : \mathrm{T}\varepsilon = \mathrm{T}\gamma : \mathrm{T}\delta,$$

und wenn zugleich der Abstand $\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}$ parallel und gleich $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ ist, wo die deutschen Buchstaben die Anfänge der entsprechend bezeichneten Vectoren sind. Von der Summe zweier longimetrischen Quaternionen mit gleichen Nennern nehmen wir an, dass sie gleich der Summe der Zähler dividirt durch den gemeinschaftlichen Nenner ist, d. h. hier gleich $(\beta + \varepsilon) : \alpha$. Um also obige Summe zu bilden, addiren wir β und ε als parallele Vectoren und dividiren die Summe σ durch α. Diese Summe σ ist ein zu α paralleler Vector von der Grösse

$$\mathrm{T}\sigma = \mathrm{T}(\beta + \varepsilon) = \mathrm{T}\beta + \mathrm{T}\varepsilon,$$

dessen Anfang den Abstand $\mathfrak{b}\,\mathfrak{e}$ im Verhältniss $\mathrm{T}\varepsilon : \mathrm{T}\beta$ theilt; es ist daher der Quotient auch wieder eine longimetrische Quaternion.

Liegen β und ε auf entgegengesetzten Seiten von α, und zwar so, dass $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in einer Geraden sind, und dass

$$\mathrm{T}\beta : \mathrm{T}\varepsilon = \mathfrak{e}\,\mathfrak{a} : \mathfrak{a}\,\mathfrak{b},$$

so fällt die Summe $\beta + \varepsilon$ auf α, und da auch die Anfänge zusammenfallen, so reducirt sich die Quaternion jetzt auf den Tensor, d. h. sie wird

zu einer blossen Zahl. Es ist also die Summe zweier Quaternionen ein Scalar, wenn der gemeinschaftliche Divisor seinen Anfang im Schwerpunkte der Dividendvectoren hat. Dasselbe gilt für die Summe von drei und mehr longimetrischen Quaternionen. Für die Differenz zweier Quaternionen können wir nach Vorstehendem setzen

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\beta - \varepsilon}{\alpha}.$$

Und indem wir die Differenz der parallelen Vectoren β und ε bilden und den erhaltenen Vector durch α dividiren, erhalten wir auch die Differenz zweier Quaternionen als eine Quaternion. Dass auch diese zu einem Scalar werden kann, sieht man leicht.

Sind in $(\beta - \varepsilon) : \alpha$ die Tensoren von β und ε einander gleich, so ist $\beta - \varepsilon$ ein im Unendlichen liegender Vector von der Länge Null, oder auch ein Operator, der zu einem anderen parallelen Vector addirt, diesen nur verschiebt, ohne die Länge desselben zu ändern. Dividirt man nun eine solche Differenz gleicher Vectoren durch einen dritten Vector, so erhält man eine Quaternion, die zu einer andern Quaternion addirt nur den Versor ändert, den Tensor dagegen nicht, wie sich diess leicht zeigen lässt, wenn man die beiden Quaternionen auf gleiche Nenner reducirt.

Da Summen und Differenzen paralleler Differenzvectoren commutativ sind, so sind es auch die Summen und Differenzen der longimetrischen Quaternionen.

2. — Um nachzuweisen, dass das Product $q_2 q_1$ zweier longimetrischen Quaternionen wieder eine solche Quaternion ist, so sei $q_1 = \beta : \alpha$, $q_2 = \delta : \gamma$. Nehmen wir dann den Vector ε so an, dass $\delta : \gamma = \varepsilon : \beta$, und dass $cb = be$, so ist

$$q_2 q_1 = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Sind hierbei ab und be die Abstände von q_1 und q_2, so ist ae der Abstand in dem Producte. Wenn also die Abstände zweier longimetrischen Quaternionen zwei aufeinanderfolgende Seiten eines Dreiecks bilden, so ist die dritte Seite, durchlaufen in der Richtung von der ersten zur dritten Ecke des Dreiecks, der Abstand des Productes jener zwei Quaternionen, während sich leicht zeigen lässt, dass der Tensor des Productes gleich dem Producte der Tensoren der Factoren ist.

Nimmt man jene Abstände einmal geradezu als Vertreter der Versoren an, so ist

$$q_1 q_2 = Tq_1 . Uq_1 . Tq_2 . Uq_2 = Tq_1 . Tq_2 . Uq_1 . Uq_2$$
$$= Tq_1 . Tq_2 . ab . bc = Tq_1 . Tq_2 . ac.$$

Denkt man sich das Dreieck abc zu dem Parallelogramme $abcb$ ergänzt, so kann auch ab als Vertreter von Uq_2 und bc als Repräsentant von Uq_1 gelten. Es ist dann

$$q_2 q_1 = Tq_2 \cdot Tq_1 \cdot Uq_2 \cdot Uq_1 = Tq_2 \cdot Tq_1 \cdot ab \cdot bc$$
$$= Tq_2 \cdot Tq_1 \cdot ac = q_1 q_2.$$

Es ist also $q_1 q_2 = q_2 q_1$. Mithin ist bei der Multiplication longimetrischer Quaternionen das commutative Princip giltig. Damit ist aber ein wesentlicher Unterschied zwischen longimetrischen und goniometrischen Quaternionen festgestellt.

Der Quotient $q_2 : q_1$ lässt sich, nachdem q_2 und q_1 auf gleiche Nenner gebracht sind, auf den Quotienten der beiden Zähler zurückführen, mithin ebenfalls auf eine Quaternion.

Sind die Tensoren zweier Quaternionen gleich eins, so reduciren sich diese Quaternionen auf ihre Versoren, welche darstellbar sind durch die Abstände der beiden Quaternionen. Legt man diese Abstände an einander, so ist das Product der Quaternionen dargestellt durch die dritte Dreiecksseite. Auch der Quotient der beiden Versoren lässt sich als eine Dreiecksseite finden, wenn man die Abstände von q_1 und q_2 nicht nach einander, sondern von demselben Punkte aus abträgt. Dann ist der Quotient dargestellt durch die dritte Dreiecksseite, durchlaufen vom Endpunkte des Divisors zum Ende des Dividenden, indem dieser Vector in der That der Abstand des gesuchten Quotienten ist.

Da die Tensoren der Producte oder der Quotienten zweier Quaternionen die Producte oder die Quotienten ihrer Tensoren sind, so kann man nun den Satz aufstellen: Multiplication oder Division zweier Quaternionen erfolgt durch Ausführung derselben Operation mit den Tensoren und mit den Versoren, wenn man letztere als Quotientvectoren betrachtet. Denn die Verbindung der Quotientvectoren durch Multiplication und Division giebt gerade die hier verlangten Resultate.

3. — Für das Product dreier Quaternionen ist das associative Princip giltig, d. h. es ist

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3).$$

Es folgt diess leicht daraus, dass, wenn die Tensoren dieser Quaternionen gleich eins, und $a\,b$, $b\,c$, $c\,b$ die Abstände der drei Quaternionen sind, sich das Product darstellen lässt durch

$$q_1 q_2 q_3 = ab \cdot bc \cdot cb,$$

wobei die Abstände als Quotientvectoren betrachtet sind. Da aber für diese Vectoren

$$(ab \cdot bc)\, cb = ab\,(bc \cdot cb) = ab,$$

so ist also für das Product dreier Versoren die Gruppirung der Factoren ohne Einfluss auf das Resultat. Der Nachweis der Richtigkeit dieses Satzes für beliebige Quaternionen bietet keine Schwierigkeiten, da die Tensoren als Scalare (reelle Zahlen) commutativ sind.

4. — Auch das distributive Princip gilt für longimetrische Quaternionen, indem wir nachweisen können, dass

$$(p + q)(r + s) = pr + qr + ps + qs,$$

worin sämmtliche Buchstaben Quaternionen darstellen.

Um zuerst zu beweisen, dass

$$(p + q)r = pr + qr,$$

lenken wir uns diese Quaternionen sämmtlich auf den Divisor α reducirt, so dass z. B.

$$p = \frac{\beta}{\alpha}, \quad q = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad r = \frac{\eta}{\alpha}.$$

Seien ferner die Abstände dieser drei Quotienten dargestellt durch ab, ac, aa_1 (Fig. 21), so ist

$$(p + q)r = \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)\frac{\eta}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{\eta}{\alpha},$$

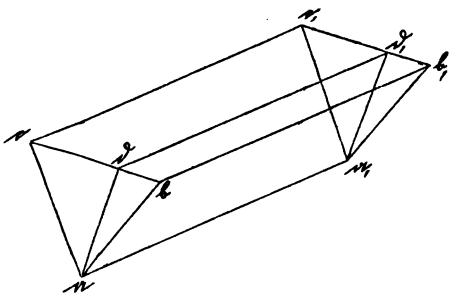

Fig. 21.

wenn δ die Summe der parallelen Vectoren β und γ ist.

Dieses letzte Product ergiebt sich aber leicht als eine Quaternion $\delta_1 : \alpha$ mit dem Abstand ab_1, wenn b der Anfang von δ, während bb_1 eine den Kanten des Prismas $abca_1b_1c_1$ parallele und gleiche Strecke darstellt.

Es ist dagegen $pr + qr$ die Summe zweier Quaternionen mit gleichen Nennern, und ab_1 und ac_1 als Abständen, deren Zähler sich verhalten wie $T\beta : T\gamma$, deren Summe daher b_1c_1 im umgekehrten Verhältniss dieser Tensoren in b_2 theilt. Mithin ist bb_2 parallel zu den Kanten des Prismas, und es fällt daher b_2 mit b_1 zusammen. Es ist also der Abstand in der Summe $pr + qr$ derselbe, wie in $(p + q)r$. Dass aber auch die Tensoren gleich sind, folgt daraus, dass für diese die Gesetze für Scalare gelten. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} T(p + q)r &= (Tp + Tq)Tr = Tp \,.\, Tr + Tq \,.\, Tr \\ &= T(pr + qr). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des vorstehenden besonderen Falles ergiebt sich nun leicht die Giltigkeit des commutativen Principes in der allgemeineren Form. Es ist nämlich

$$(p + q)(r + s) = p(r + s) + q(r + s);$$

und da diese Producte commutativ sind, so dürfen wir für die rechte Seite setzen $(r + s)p + (r + s)q$, welche Summe sich schliesslich auflösen lässt in $pr + ps + qr + qs$ als Werth für $(p + q)(r + s)$.

§. 63. Verwandte Quaternionen.

1. — Unter der reciproken Quaternion $\mathrm{R}q$ von q verstehen wir die Quaternion, welche mit q multiplicirt zum Producte eins ergiebt. Wird also der Vector μ erst mit q und dann mit $\mathrm{R}q$ multiplicirt, so erhalten wir wieder μ. Es ergiebt sich daher aus

$$q \,.\, \mathrm{R}q = \mathrm{T}q \,.\, \mathrm{U}q \,.\, \mathrm{TR}q \,.\, \mathrm{UR}q = \mathrm{T}q \,.\, \mathrm{TR}q \,.\, \mathrm{U}q \,.\, \mathrm{UR}q = 1,$$

dass $$\mathrm{TR}q = (\mathrm{T}q)^{-1} \quad \text{und} \quad \mathrm{UR}q = (\mathrm{U}q)^{-1},$$

dass mithin $$\mathrm{R}q = (\mathrm{T}q)^{-1} \,.\, (\mathrm{U}q)^{-1} = q^{-1}.$$

Da also durch Multiplication von $q \,.\, \mu$ mit $\mathrm{R}q$ die Wirkung der Multiplication des μ mit q vollständig aufgehoben wird, so muss $(\mathrm{U}q)^{-1}$ eine Verschiebung erzeugen, welche der durch $\mathrm{U}q$ hervorgebrachten zwar an Grösse gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt ist. Es muss diess besonders erwähnt werden, weil man sonst meinen könnte, eine Verschiebung im negativen Sinne würde durch $-\mathrm{U}q$ angedeutet.

2. — Die negative Quaternion $-q$ ergiebt in μ multiplicirt einen neuen Vector von derselben Länge wie $q\mu$, und auch mit demselben Anfangspunkte, aber von entgegengesetzter Richtung.

Der Versor von $-q$ ist also derselbe wie der von q; dagegen ist $\mathrm{T}(-q) = -\mathrm{T}q$. Wir können uns $-q$ enstanden denken aus $-\beta : \alpha$, oder aus $\beta : -\alpha$, und müssen in $-q$ das Vorzeichen dem Tensor beilegen, da der Versor immer als ein zeichenloser Ausdruck auftritt.

3. — Die zu q conjugirte Quaternion $\mathrm{K}q$ unterscheidet sich von q nur durch den Sinn, in dem die von ihr hervorgebrachte Verschiebung vor sich geht. Verschiebt nämlich q von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, so bewirkt $\mathrm{K}q$ die Verschiebung von $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$. Die Tensoren und die absolute Grösse der Verschiebung beider Quaternionen sind dagegen dieselben. Denken wir uns z. B. den Abstand $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ der gleichlangen parallelen Vectoren α und β in $\mathfrak{m}$ halbirt, und durch den Halbirungspunkt den Vector μ parallel zu α und β gezogen, so ist

$$\frac{\alpha}{\mu} = \mathrm{K}\frac{\beta}{\mu}, \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\mu} = \mathrm{K}\frac{\alpha}{\mu},$$

woraus sofort folgt, dass allgemein

$$\mathrm{T}\mathrm{K}q = \mathrm{T}q, \quad \mathrm{U}\mathrm{K}q = \mathrm{U}q^{-1} = (\mathrm{U}q)^{-1}, \quad \mathrm{K}\mathrm{K}q = q.$$

Ferner ergiebt sich leicht, dass

$$q + \mathrm{K}q = (\alpha + \beta) : \mu = 2\mathrm{T}q,$$

weil die in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ angebrachten Vectoren α und β sich bei gleicher Länge zu einem in $\mathfrak{m}$ befindlichen Vector von doppelter Länge summiren, der dann durch μ dividirt eine Quaternion ergiebt, die sich auf $2\mathrm{T}q$ reducirt.

Wie bei den goniometrischen Quaternionen, so ist auch bei den ongimetrischen

$$qKq = Tq \,.\, Uq \,.\, Tq \,.\, (Uq)^{-1} = (Tq)^2.$$

Daher ist auch hier die conjugirte Quaternion einer reellen Zahl diese Zahl selbst. Aus Vorstehendem ergiebt sich ferner

$$(q + Kq)^2 = q^2 + 2qKq + (Kq)^2 = 4(Tq)^2,$$

ınd da

$$qKq = (Tq)^2,$$

ıo ist

$$q^2 + (Kq)^2 = 2(Tq)^2.$$

Da aber auch

$$q^2 + K(q^2) = 2T(q^2),$$

ıo haben wir, weil

$$(Tq)^2 = T(q^2),$$

ıuch

$$(Kq)^2 = K(q^2),$$

ein Satz, der sich auch für höhere Potenzen als giltig erweisen lässt.

Es ist, abweichend von den goniometrischen Quaternionen, jetzt

$$K(q_1 q_2) = Kq_1 \,.\, Kq_2.$$

Denn indem wir uns auf Versoren beschränken, kann q_1 durch ab, q_2 durch bc dargestellt werden. Dann ist

$$q_1 q_2 = ab \,.\, bc = ac,$$

$$Kq_1 \,.\, Kq_2 = ba \,.\, cb = cb \,.\, ba = ca = K(q_1 q_2).$$

Für Quaternionen überhaupt ergiebt sich dann der Satz durch Zufügung der Tensoren.

4. — Mann kann aus den vorstehenden Beziehungen zwischen q und Kq auch noch folgendes Resultat entwickeln. Es ist

$$q^2 + 2qKq + Kq^2 = 4(Tq)^2 = 4qKq,$$

mithin

$$q^2 - 2qKq + Kq^2 = 0,$$

oder

$$(q - Kq)^2 = 0,$$

und hieraus $q - Kq = 0$, oder $q = Kq$.

Dieses Ergebniss ist aber durchaus nicht allgemein zulässig. Der Grösse nach sind allerdings q und Kq einander gleich, aber als longimetrische Quaternionen sind sie es ganz und gar nicht; sie stehen fast in demselben Gegensatze wie positive und negative reelle Zahlen. Es muss daher der letzte Schluss ein unrichtiger sein, nämlich der, dass aus $(q - Kq)^2 = 0$ folge, dass auch $q - Kq = 0$ sei.

So auffallend nun auch dieses Resultat ist, so müssen wir es doch als eine Consequenz der Rechnung mit longimetrischen Quaternionen annehmen und daher geradezu feststellen, dass, obgleich $q - Kq$ nicht Null ist, doch $(q - Kq)^2$ den Werth Null hat.

Dieses Ergebniss veranlasst uns, $q - Kq$ noch einmal näher ins Auge zu fassen. Es sei

$$q - Kq = \frac{\alpha}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} = \frac{\alpha - \beta}{\mu}.$$

Hierin ist nun der Zähler ein Operator, durch dessen Addition zu einem beliebigen Vector γ, wie wir früher schon nachgewiesen, dieser in einer zu ba parallelen Richtung verschoben wird, ohne dass seine Grösse eine Aenderung erleidet. Dasselbe gilt von der Quaternion $(\alpha - \beta) : \mu$ in Bezug auf eine andre Quaternion. Durch Addition von $q - Kq$ zu einer beliebigen Quaternion wird ohne Aenderung des Tensors derselben nur ihr Versor verändert. Es ist also $q - Kq$ ein Verschieber für longimetrische Quaternionen, aber nicht durch Multiplication, sondern durch Addition. Und von diesen Additionsversoren haben wir nun gefunden, dass ihr Quadrat gleich Null ist, ein Resultat, dass sich auch leicht bestätigen lässt, indem man an einer Figur nachweist, dass in der That $q^2 + Kq^2$ und $2q \,.\, Kq$ gleichgrosse Werthe an derselben Stelle sind, die daher bei entgegengesetztem Vorzeichen einander tilgen.

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass nicht nur das Quadrat der Differenz aus einer longimetrischen Quaternion und ihrer Conjugirten gleich Null ist, sondern dass das Product je zweier solcher Differenzen Null ergiebt. Denn es sei

$$p_1 = q_1 - Kq_1, \quad p_2 = q_2 - Kq_2,$$

dann ist

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= q_1 q_2 + Kq_1 \,.\, Kq_2 - (q_1 Kq_2 + q_2 Kq_1) \\ &= q_1 q_2 + K(q_1 q_2) - (q_1 Kq_2 + q_2 Kq_1). \end{aligned}$$

Von der rechten Seite lässt sich nun zeigen, dass sie gleich Null ist. Die zwei ersten Summanden ergeben nämlich $2T(q_1 q_2)$; und die Summe der beiden letzten Glieder lässt sich mit Zuziehung einer Figur, in welcher die Versoren durch die Abstände dargestellt sind, auch als $2Tq_1 \,.\, Tq_2$ oder $2T(q_1 q_2)$ nachweisen. Mithin ist $p_1 p_2$ wirklich gleich Null.

Es lässt sich später leicht zeigen, dass überhaupt die Differenzen gleicher parallelen Vectoren durch einen dritten Parallelvector dividirt Werthe liefern, für welche das Product je zweier gleich Null ist.

Obschon der Satz, dass ein Product nur zu Null werden kann, wenn einer der Factoren Null ist, ein bekanntes Princip der allgemeinen Arithmetik bildet, so haben wir doch schon in der Theorie der goniometrischen Quaternionen (§. 53, 9) complexe Quaternionenausdrücke gefunden, deren Product Null ist, ohne dass einer ihrer Factoren verschwindet. Wir haben auch in der Theorie der longimetrischen Functionen in $j-1$ einen Ausdruck kennen gelernt, dessen Quadrat $j^2 - 2j + 1$ der Null gleich ist, doch werden wir sehen, dass die Differenz $j-1$ in naher Beziehung zu $q - Kq$ steht. Endlich wollen wir erwähnen, dass die alternirenden Zahlen, wie sie Hankel in seiner Theorie der complexen Zahlen erörtert, geradezu von Einheiten ausgehen, deren Quadrate Null sind. Das für den ersten Augenblick so auffällige Resultat, dass $p_1 p_2$ gleich Null sei,

ohne dass p_1 oder p_2 verschwindet, steht also nicht isolirt da, ist aber für die longimetrischen Quaternionen eine ebenso charakteristische Eigenschaft, wie für die goniometrischen Quaternionen etwa der Satz, dass das Quadrat von $q - Kq$ einen negativen Werth hat.

§. 64. Die Versoren als Quotientvectoren.

1. — Wir haben im Vorhergehenden den Versor einer Longiquaternion mehrfach dargestellt durch deren Abstand, d. h. durch den Vectorabstand des Anfangspunktes des Divisorvectors von dem des Dividendvectors der Quaternion; dadurch gestaltete sich nämlich die Betrachtung oft einfacher, vorwiegend aber anschaulicher. Gegenwärtig wollen wir nun nachweisen, dass man in der That den Quotienten gleichlanger paralleler Differenzvectoren als denjenigen Quotientvector definiren kann, der mit dem Abstande ihrer Anfangspunkte zusammenfällt.

Eine Longiquaternion, deren Tensor gleich eins ist, reducirt sich auf ihren Versor, d. h. auf einen Operator, der durch Multiplication einen Differenzvector um eine gewisse Länge in eine zur alten parallele Lage verschiebt. Ein solcher Versor kann daher geradezu dargestellt werden durch den Vector, um den er verschiebt, d. h. durch die Verbindungsstrecke zwischen den Anfangspunkten der ersten und zweiten Lage des verschobenen Differenzvectors, dieser Abstand betrachtet nach Grösse, Richtung und Sinn.

Sind daher α und β parallele Einheitsvectoren, oder doch von gleicher Länge, so können wir $\beta : \alpha$ ersetzen durch c, d. h. den Abstand $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ der Anfangspunkte von α und β. Sind α und β nicht längengleich, so ist

$$U\beta : U\alpha = U(\beta : \alpha) = c.$$

Dass wir dabei den Vector $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit c und nicht etwa mit γ bezeichnen, geschieht deshalb, weil wir noch nachweisen werden, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ als Vertreter von $U(\beta : \alpha)$ ein Quotientvector, also nach früherer Bestimmung mit lateinischen Buchstaben zu benennen ist.

Ist der Tensor einer Longiquaternion nicht gleich eins, so lässt sie sich darstellen durch

$$q = Tq \,.\, Uq = Tq \,.\, c,$$

wo auch hier c der Abstand der Quaternion als Quotientvector ist. Wir können daher jede solche Quaternion jetzt darstellen als Product aus einer Zahl in einen Quotientvector.

Lassen wir c die Einheitslänge in der Richtung des Abstandes sein, so ist der Abstand selbst darstellbar durch c^n, die Quaternion daher durch $t \,.\, c^n$, wenn hierin t den Tensor bedeutet.

Die goniometrischen Quaternionen lassen sich dagegen auf die entsprechende Form $t \cdot \gamma^m$ bringen, worin t der Tensor, γ ein Einheitsvector senkrecht zur Ebene der Quaternion und m das Mass des Winkels der Quaternion, nämlich $\varphi : {}^1/_2\pi$ ist.

2. — Die Einführung des Abstandes einer Längenquaternion statt des Versors wird jedoch nur gestattet sein, wenn sich allgemein nachweisen lässt, dass die Resultate der Rechnung mit Quaternionen auch erlangt werden, wenn man diese geometrischen Quotienten ersetzt durch Producte aus einer Zahl und einem Quotientvector und mit diesen neuen Ausdrücken dieselben Rechnungsoperationen vornimmt, wie mit den ursprünglichen Quaternionen. Dieser Nachweis soll jetzt für die vier Grundrechnungen geführt werden. Wollte man dabei versuchen, die Abstände der Anfänge der Vectoren als Differenzvectoren aufzufassen, so würde man, wie wir an einem Beispiele noch zeigen werden, nicht zum richtigen Ziele kommen. Man muss die Versoren durch Quotientvectoren ersetzen, dann fallen die Schwierigkeiten weg.

Es seien v_1 und v_2 zwei Versoren, die wir uns schon auf gleiche Nenner gebracht denken, und es sei

$$v_1 = \beta : \alpha, \quad v_2 = \gamma : \alpha;$$

dann ist

$$v_1 + v_2 = (\beta + \gamma) : \alpha = 2\mu : \alpha,$$

wobei 2μ nun eine Länge von zwei Einheiten im Halbirungspunkt m des Abstandes bc ist. Ersetzen wir aber v_1 durch den Quotientvector ab, und v_2 durch ac, so ist nach §. 58, 5

$$v_1 + v_2 = ab + ac = 2am.$$

Betrachten wir jetzt den Quotientvector am als Vertreter eines Versors, so dürfen wir am gleich $\mu : \alpha$ setzen und haben damit durch die Rechnung mit den Quotientvectoren dasselbe Resultat gefunden, wie durch die Rechnung mit den Quaternionen selbst.

Wollten wir aber ab und ac als Differenzvectoren auffassen, so wäre ihre Summe gleich ab, d. h. gleich der Diagonale in dem Parallelogramme abbc, von welchem abc die eine Hälfte ist. Es wäre also die Summe der Versoren v_1 und v_2 ein Versor mit dem Abstand ab, welches unrichtig ist, d. h. nicht übereinstimmt mit dem Resultate der directen Addition von v_1 und v_2. Wir dürfen also, wenn wir die Versoren durch die Abstände der Quaternionen ersetzen wollen, diese Abstände nicht als Differenzvectoren auffassen.

Durch Vorstehendes ist bewiesen, dass

$$v_1 + v_2 = m_1 + m_2 = 2m,$$

wenn m_1 und m_2 die Abstände der Versoren v_1 und v_2, m aber der Abstand der Quaternion $v_1 + v_2$ ist.

Hätten wir dagegen $q_1 + q_2$ zu bilden, so würden wir setzen

$$q_1 + q_2 = \frac{\beta_1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha},$$

wo β nun ein Vector mit dem Anfang im Punkte b ist, der so liegt, dass $b_1 b : b b_2 = T\beta_2 : T\beta_1$, während $T\beta = T\beta_1 + T\beta_2$ ist. Ersetzen wir nun q_1 durch $Tq_1 . m_1$ und q_2 durch $Tq_2 . m_2$, wo m_1 und m_2 die Quotientvectoren ab_1 und ab_2 sind, so ist

$$q_1 + q_2 = Tq_1 . m_1 + Tq_2 . m_2 = (Tq_1 + Tq_2) . m,$$

und jetzt ist m der Quotientvector am, dessen Ende auf $b_1 b_2$ und zwar so liegt, dass $b_1 m : m b_2 = Tq_2 : Tq_1$ ist, nach der in §. 58, 5 gegebenen Regel, wonach für Quotientvectoren

$$m . oa + n . ob = (m + n)\, oc,$$

wenn

$$m : n = cb : ac.$$

Es sind daher die Resultate der directen Addition von $q_1 + q_2$ und von $Tq_1 . m_1 + Tq_2 . m_2$ dieselben, wenn man zum Schluss $(Tq_1 + Tq_2)\, m$ als eine Quaternion auffasst mit dem Versor m.

Aus
$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= Tq_1 . m_1 + Tq_2 . m_2 = (Tq_1 + Tq_2) . m \\ &= (Tq_1 + Tq_2) . {}^1/_2 (m_1 + m_2) \\ &= (Tq_1 + Tq_2)\, {}^1/_2 (Uq_1 + Uq_2) \end{aligned}$$

sieht man noch, dass der Tensor der Summe zweier Quaternionen zwar gleich der Summe der Tensoren der Theile, dass aber der Versor der Summe nur gleich der halben Summe der Versoren der Summanden ist. Es ist also die Bildung des Tensors einer Summe eine distributive Operation, die des Versors dagegen nicht.

3. — Vorstehende Betrachtungen gelten im Wesentlichen auch für

$$q_1 - q_2 = Tq_1 . m_1 - Tq_2 . m_2 = (Tq_1 - Tq_2) . m,$$

wo m nun der Quotientvector ist zu dem Punkte m auf $b_1 b_2$, der so liegt, dass

$$b_1 m : m b_2 = -Tq_2 : Tq_1.$$

Wenn in dem letzten Falle $Tq_1 = Tq_2$, so fällt m ins Unendliche, während der Tensor dieser Differenz Null ist. Ein solcher Unterschied lässt sich dann, wie wir schon gezeigt haben, als einen Translator auffassen, der durch Addition zu einer anderen Quaternion eine Aenderung im Versor derselben erzeugt, ohne ihren Tensor zu ändern.

4. — Das Product der Versoren v_1 und v_2 ist der Versor v, dessen Abstand die dritte Seite in einem Dreiecke bildet, wenn die zwei ersten Seiten desselben die Abstände m_1 und m_2 von v_1 und v_2 sind. Ersetzen wir nun v_1 und v_2 durch die Quotientvectoren m_1 und m_2, so ist nach den früheren Lehren über das Product solcher Vectoren $m_1 m_2 = m$, wo m die dritte Dreiecksseite zu den aufeinanderfolgenden Seiten m_1 und m_2 ist. Es ist also in der That m der Abstand des Productes $v_1 v_2$, kann

also geradeso als Vertreter von $v_1 v_2$ auftreten, wie m_1 und m_2 es für v_1 und v_2 thun.

Für $q_1 q_2$ endlich können wir setzen

$$q_1 q_2 = Tq_1 . Tq_2 . Uq_1 . Uq_2 = T(q_1 q_2) . U(q_1 q_2)$$
$$= T(q_1 q_2) . m_1 . m_2 = T(q_1 q_2) . m,$$

indem m geradeso den Versor von $q_1 q_2$ darstellt, wie m_1 und m_2 die Versoren von q_1 und q_2 bilden. Es ist endlich auch

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{Tq_2 \, Uq_2}{Tq_1 \, Uq_1} = \frac{Tq_2}{Tq_1} \cdot \frac{m_2}{m_1} = T\frac{q_2}{q_1} . n,$$

wo n jetzt die dritte Dreiecksseite zu m_1 und m_2 darstellt, wenn m_1 und m_2 von demselben Punkte ausgehen und n von dem Endpunkte von m_1 zu dem von m_2 geht. Dann ist aber n in der That der Abstand im Quotienten und stellt denselben im Verein mit $T(q_2 : q_1)$ vollständig dar.

5. — Ersetzen wir also in den Longiquaternionen die Versoren durch die Quotientvectoren, die ihre Abstände bilden, und führen die Rechnung mit diesen Vectoren, denen die Tensoren als Coefficienten beigegeben sind, so ergeben sich für die vier Grundrechnungen Resultate, welche ebenso die Ergebnisse der directen Rechnung mit den Quaternionen darstellen, wie diess durch Einführung der Abstände in Bezug auf die jedesmaligen der Rechnung zu Grunde liegenden Quaternionen geschieht. Allgemein lässt sich diess etwa durch die Formel ausdrücken

$$F(q_1, q_2 \ldots) = F(t_1 m_1, t_2 m_2 \ldots),$$

wenn $t_1, t_2 \ldots$ die Tensoren, $m_1, m_2 \ldots$ die Abstände der Quaternionen $q_1, q_2 \ldots$ darstellen.

Die vorstehenden Untersuchungen werden es daher rechtfertigen, wenn wir den Quotienten paralleler Einheitsvectoren (oder auch paralleler Vectoren von gleicher Länge) als den Quotientvector ihrer Anfangspunkte definiren, so dass also von jetzt an für uns, wenn

$$T\beta = T\alpha,$$
$$\beta : \alpha = ab = c$$

gesetzt werden kann, während allgemein

$$\beta : \alpha = (T\beta : T\alpha) . ab = t . ab = t . c$$

ist, mithin auch $\beta = tc\alpha$.

Zugleich geht aus den letzten Betrachtungen hervor, dass wir einen Quotientvector nicht allein als einen Factor zu betrachten haben, der einen Punkt verschiebt, sondern dass ein solcher auch durch Multiplication einen Differenzvector in eine parallele Lage bringt; ganz ähnlich waren wir früher dazu gelangt, die Differenzvectoren, welche ursprünglich durch Addition zu Punkten dieselben verschoben, als Operatoren kennen zu lernen, die durch Multiplication mit einem zu ihnen senkrechten Differenzvector eine Drehung des letzteren erzeugen.

Direct lässt sich die Wirkung der Multiplication eines Quotientvectors in einen Differenzvector etwa so nachweisen. Es sei $c.a = a_1$ und $c.b = b_1$, dann ist unter Annahme des distributiven Princips einerseits

$$c.b - c.a = c(b - a) = c.ab;$$

andrerseits ist

$$c.b - c.a = b_1 - a_1 = a_1 b_1,$$

wo nun $a_1 b_1$ ein zu ab gleicher und paralleler Differenzvector ist, der durch Verschiebung des ab um c in seine Lage kam, so dass wir also haben $c.ab = a_1 b_1$, was wir zeigen wollten.

6. — Wie wir im Vorstehenden gelernt haben, einen jeden Versor durch einen Quotientvector zu ersetzen, so können wir nun auch umgekehrt jeden Quotientvector als den Versor einer Longiquaternion, mithin als eine solche Quaternion mit dem Tensor eins selbst auffassen. Dadurch erscheinen jetzt die Rechnungen mit Quotientvectoren zum Theil in einem anderen Lichte.

So sind jetzt c und $-c$ Vectoren oder Versoren, die um gleiche Längen und in demselben Sinne verschieben, nur kehrt $-c$ die Richtung des zu verschiebenden Differenzvectors um. Es stellen dagegen c und c^{-1} Vectoren dar, die in derselben Richtung um gleiche Längen aber in entgegengesetztem Sinne verschieben. Es ist endlich Kc, d. h. der zu c conjugirte Quotientvector, ein Versor, der die entgegengesetzte Verschiebung wie c erzeugt, mithin $Kc = c^{-1}$.

Man kann an den Quotientvectoren auch eine Länge und eine Richtung dadurch unterscheiden, dass man sie in Tensor und Versor zerlegt. Bezeichnet man diess wieder durch Ta und Ua, so muss nur festgehalten werden, dass jetzt a nicht $Ta.Ua$, sondern gleich Ua potenzirt mit Ta ist. Soll die Länge der Quotientvectoren in der Rechnung sichtbar werden, so müssen, für irgend einen Quotientvector als Basis, die Logarithmen dieser Vectoren gebildet werden, wie diess in §. 59 gezeigt worden ist.

Vielfach muss auch auf die doppelte Bedeutung eines solchen Vectors geachtet werden, wonach derselbe bald ein Operator ist, der durch Multiplication einen Differenzvector verschiebt, bald ein Differenzvector von der Längeneinheit, der schon um die Länge des Quotientvectors verschoben ist. Hält man dieses fest, so erklären sich leicht Gleichungen wie

$$c + c^{-1} = 2.$$

Dieselbe sagt einmal, dass die linke Seite als Operator durch Multiplication mit irgend einem Vector α dasselbe giebt, wie die rechte, indem $c\alpha + c^{-1}\alpha$ in der That gleich 2α ist. Dieselbe Gleichung kann aber auch aufgefasst werden als ein Ausdruck dafür, dass die von einem gewissen Anfangspunkt nach entgegengesetzten Seiten in dem Abstande c

abgetragenen parallelen Differenzvectoren von der Längeneinheit, zur Summe zwei Längeneinheiten im Anfangspunkte ergeben. Rechnend überzeugt man sich jetzt auch leicht folgendermassen von der Richtigkeit dieser Gleichung. Es ist, wenn q die Quaternion mit dem Versor c und Tensor 1 vorstellt,

$$c + c^{-1} = c + Kc = 2\,Tq = 2.$$

Ebenso sieht man jetzt ohne Schwierigkeit die Richtigkeit von

$$a + b + c = 3$$

ein, wenn die Quotientvectoren a, b und c der Grösse und Richtung nach mit den drei Seiten eines Dreiecks übereinstimmen. Denkt man sich diese Vectoren nämlich von einem Punkte aus abgetragen, so kann man die linke Seite der obigen Gleichung betrachten als die Summe dreier Einheitsvectoren in den Enden von a, b und c. Als diese Summe findet man aber leicht drei Längeneinheiten im gemeinschaftlichen Anfangspunkt der Quotientvectoren.

§. 65. Die Elementarversoren j_1, j_2, j_3.

1. — Wir können auch für die longimetrischen Quaternionen feststellen, dass eine Quaternion, deren Abstand gleich der Längeneinheit ist, eine Elementarquaternion, der zugehörige Versor aber ein Elementarversor oder eine Elementare heisse. Bezeichnen wir eine solche Elementare mit j, so haben wir, wenn $T\alpha = T\beta$ und $\alpha\,b$ gleich der Längeneinheit,

$$\beta : \alpha = j,$$

oder

$$\beta = j\alpha.$$

Es ist also j ein Factor, der α durch Multiplication um die Längeneinheit in einer gewissen Richtung verschiebt. Da wir aber im vorigen Paragraphen gesehen haben, dass die Versoren gleich dem Quotientvector sind, um welchen sie verschieben, so ist j auch gleich dem Quotientvector αb.

Ist ein Vector γ so gelegen, dass er gleich $j\beta$, während $\beta = j\alpha$, so haben wir

$$\gamma = j\beta = j^2\alpha;$$

daher ist γ ein dritter Vector, von derselben Länge wie α, dessen Anfang c aber so liegt, dass $ac = 2\,.\,ab$. Es ist also j^2 ein Factor, der um die doppelte Einheit verschiebt; ebenso lässt sich leicht zeigen, dass j^n eine Verschiebung um n Einheiten in der Richtung von ab erzeugt.

Da aber, wenn $\gamma = j^2\alpha$, der Vector γ auch zerlegt werden kann in den Vector 2β in b und $-\alpha$ in a, so ist

$$\gamma = 2\beta - \alpha,$$

oder

$$j^2\,.\,\alpha = 2j\alpha - \alpha,$$

mithin

$$j^2 = 2j - 1,$$

wie sich freilich auch aus dem Wesen des j als Quotientvector direct ergiebt.

Dieselbe Beziehung für j haben wir aber schon in dem Abschnitte über die longimetrischen Functionen (§. 34, 3) gefunden. Den daselbst ebenfalls ermittelten algebraischen Ausdruck für j, nämlich

$$j = \sqrt[\infty]{-1} = (-1)^0,$$

ist es dem Verfasser bis jetzt noch nicht gelungen, anders abzuleiten, als auf dem dort eingeschlagenen Wege.

2. — Denken wir uns von dem Punkte o aus zwei Strahlen $o\mathfrak{x}$ und $o\mathfrak{y}$ gezogen, und sei der Elementarversor längs des ersteren mit j_1, längs des zweiten mit j_2 bezeichnet, so ist

$$j_1^2 = 2j_1 - 1, \quad j_2^2 = 2j_2 - 1.$$

Es ist aber das Product $j_1 j_2$ ein Versor, der nach Grösse und Richtung gleich der dritten Seite des Dreiecks ist, welches j_1 und j_2 zu aufeinanderfolgenden Seiten hat. Denken wir uns im Endpunkte von $j_1 j_2$ einen Vector δ, so kann derselbe auch ersetzt werden durch zwei gleichlange Vectoren in den Endpunkten von j_1 und j_2 und durch einen Vector $-\alpha$ im Anfangspunkte von j_1 und j_2. Denn die Vectoren $j_1\alpha$ und $j_2\alpha$ summiren sich zu 2α. in der Mitte des Parallelogrammes mit den Seiten j_1 und j_2, und dieser Vector 2α ergiebt mit $-\alpha$ im Anfangspunkte als Summe einen Vector δ im Punkte $j_1 j_2$, so dass wir also haben

$$j_1 j_2 \alpha = j_1\alpha + j_2\alpha - \alpha,$$

oder

$$j_1 j_2 = j_1 + j_2 - 1,$$

die auch früher schon gegebene Grundbeziehung zwischen j_1 und j_2, welche wir aber jetzt auch als eine Gleichung zwischen irgend zwei von demselben Punkte ausgehenden Quotientvectoren auffassen können.

Denken wir uns von dem Punkte o aus noch einen dritten Strahl $o\mathfrak{z}$ ausserhalb der Ebene $j_1 j_2$ gezogen, und sei j_3 der Elementarversor in dieser Richtung, so gelten zu den obigen Beziehungen zwischen j_1 und j_2 auch noch die Gleichungen

$$j_3^2 = 2j_3 - 1, \quad j_1 j_3 = j_1 + j_3 - 1, \quad j_2 j_3 = j_2 + j_3 - 1.$$

Endlich ist auch noch

$$j_1 j_2 j_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 2,$$

wie man durch Multiplication einer der beiden letzten Gleichungen mit der darin noch fehlenden Elementaren finden kann, oder auch direct durch geometrische Betrachtungen. Es stellt nämlich $j_1 j_2 j_3 \alpha$ den Vector δ im Endpunkte der von o ausgehenden Diagonale des Parallelepipedons über den Kanten j_1, j_2 und j_3 dar, während $j_1\alpha + j_2\alpha + j_3\alpha$ einen Vector von der Länge 3α im Schwerpunkte des Dreiecks angiebt, dessen Ecken die Endpunkte von j_1, j_2 und j_3 sind. Endlich ist

$$j_1\alpha + j_2\alpha + j_3\alpha - 2\alpha$$

der Ausdruck für einen Vector , der den Abstand des Punktes o von dem vorgenannten Dreiecksschwerpunkte äusserlich im Verhältniss von 3 : 2 theilt, der also seinen Anfang im Endpunkte der oben genannten Diagonale hat; es ist mithin

$$j_1 j_2 j_3 \alpha = j_1 \alpha + j_2 \alpha + j_3 \alpha - 2\alpha,$$

oder

$$j_1 j_2 j_3 = j_1 + j_2 + j_3 - 2.$$

Man könnte von o aus noch weitere Strahlen ziehen mit den Versoren $j_4, j_5 \ldots$; diess ist jedoch deshalb nicht nöthig, weil es uns gelingen wird, jeden weiteren Versor mit Hilfe von j_1, j_2 und j_3 auszudrücken.

Doch können wir noch zufügen, dass

$$j_1 j_2 j_3 j_4 = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 - 3,$$

und ganz allgemein

$$j_1 \cdot j_2 \cdot \ldots \cdot j_n = j_1 + j_2 + \ldots + j_n - n + 1,$$

wie sich leicht durch den Schluss von r auf r + 1 nachweisen lässt.

Schliesslich wollen wir erwähnen, dass die durch j_1, j_2 und j_3 ausgedrückten Längeneinheiten längs der Strahlen $o\mathfrak{x}$, $o\mathfrak{y}$ und $o\mathfrak{z}$ durchaus nicht längengleich unter einander zu sein brauchen. Es darf vielmehr die Einheit auf einem jeden dieser Strahlen eine andere sein, obige Formeln bleiben doch richtig.

Man kann auch noch andere Beziehungen zwischen den Elementaren j_1, j_2 und j_3 aufsuchen, wie wir in §. 38, 4 und §. 41, 4 gezeigt haben. Ganz allgemein lässt sich jede algebraische Verbindung von j_1, j_2 und j_3, die keine transcendenten Ausdrücke derselben enthält, auf die Form

$$A + Bj_1 + Cj_2 + Dj_3$$

bringen. Das einfachste Mittel bietet hierzu der erweiterte Moivre'sche Lehrsatz, dessen Giltigkeit für die vorliegenden Quaternionen durch die Betrachtungen des nächsten Paragraphen festgestellt wird.

3. — Die leicht nachweisbare Eigenschaft der Quotientvectoren, dass a — 1 ein Ausdruck ist, der, ohne Null zu sein, doch zum Quadrate Null ergiebt (vergl. §. 62, 4), gilt auch von den Elementarversoren j_1, j_2 und j_3. Es sind

$$k_1 = j_1 - 1, \quad k_2 = j_2 - 1, \quad k_3 = j_3 - 1$$

Werthe, deren Potenzen und Producte unter einander gleich Null sind. Diese Eigenschaft kann zur Aufstellung von Ausdrücken oder Zahlen führen von der Form

$$Ak_1 + Bk_2 + Ck_3,$$

welchen die Eigenthümlichkeit anhaftet, dass sie nur durch Addition und Subtraction mit einander zu endlichen Werthen verbunden werden können, dass dagegen Producte derselben stets Null zum Resultate ergeben, während ihre Quotienten Null durch Null sind.

Eine solche Zahl ist ein Operator durch Addition oder Subtraction. Es ist nämlich

$$\gamma + \delta(Ak_1 + Bk_2 + Ck_3)$$

ein neuer Vector von der Länge γ, dessen Anfang e aber so liegt, dass

$$T\gamma \,.\, ce = T\delta \,.\, ob,$$

wenn c der Anfang von γ, o der Anfang von j_1, j_2 und j_3, und b endlich der Punkt in der Ebene durch die Enden von j_1, j_2 und j_3 ist, dessen Raumcosinusse A, B und C sind. Zugleich lässt sich zeigen, dass die Verschiebung c e parallel zu o b ist.

Dieses Resultat steht in engem Zusammenhang mit dem in §. 60, 2 nachgewiesenen Verschieben eines Vectors durch Addition eines Vectorpaares, indem in der That

$$\delta(Ak_1 + Bk_2 + Ck_3)$$

das Vectorpaar $\delta - \delta_0$ ist, wovon δ in dem Punkte b der Ebene der Endpunkte von j_1, j_2, j_3 angreift, während $-\delta_0$ in dem Anfangspunkt o dieser Elementarversoren beginnt. Die Einheiten k_1, k_2, k_3 dieser neuen Art Zahlen bewirken selbst Verschiebungen in den Richtungen von j_1, j_2 und j_3, Richtungen, die man daher auch als die von k_1, k_2 und k_3 bezeichnen kann. Diese Einzelverschiebungen sind proportional und parallel den Längen und Richtungen der Versoren j_1, j_2 und j_3. Die Möglichkeit einer Verwendung solcher Ausdrücke in k_1, k_2 und k_3 auf dem Gebiete der Mechanik sieht man leicht ein, indem dort den Kräften- und Rotationspaaren ähnliche Eigenschaften zukommen wie den k Zahlen.

§. 66. Zerlegung der longimetrischen Quaternionen in Summen.

1. — Ist $q = \beta : \alpha$, so können wir uns den Vector β zerlegt denken in die Parallelvectoren β_0 und β', von denen β_0 nach Anfang und Richtung mit α zusammenfällt, während β' in der Entfernung j von α auf der durch die Anfänge von α und β gehenden Geraden seinen Anfang hat. Dann ist unter Annahme des distributiven Principes

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_0 + \beta'}{\alpha} = \frac{\beta_0}{\alpha} + \frac{\beta'}{\alpha}.$$

Dabei ist

$$T\beta_0 = T\beta \,.\, \mathrm{Cos}\, \mathfrak{b},$$
$$T\beta' = T\beta \,.\, \mathrm{Sin}\, \mathfrak{b},$$

wenn diese longimetrischen Functionen auf die Länge j als Basis mit dem Anfange in a bezogen sind. Wir bekommen daher

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}(\mathrm{Cos}\, \mathfrak{b} + j\, \mathrm{Sin}\, \mathfrak{b}) = \frac{T\beta}{T\alpha}.(\mathrm{Cos}\, \mathfrak{a}\mathfrak{b} + j\, \mathrm{Sin}\, \mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

als Ausdruck für $\beta : \alpha$, weil β' nach der Voraussetzung in der Entfernung j von α, daher $\beta' : \alpha$ eine Elementarquaternion mit dem Versor j ist.

In dem so gefundenen Binome ist $(T\beta : T\alpha) \operatorname{Cos} \mathfrak{b}$ eine gemeine Zahl, ein Scalar, während $\mathfrak{j} . (T\beta : T\alpha) . \operatorname{Sin} \mathfrak{b}$ einen Quotientvector darstellt, der noch mit einem Coefficienten behaftet ist. Wir können daher den ersten Theil den Scalartheil oder den Scalar der Quaternion nennen, den zweiten Theil dagegen ihren Vectortheil oder ihren Vector. In Zeichen werden wir diess ausdrücken durch

$$\mathfrak{q} = \beta : \alpha = S\mathfrak{q} + V\mathfrak{q} = T\mathfrak{q} . (\operatorname{Cos} \mathfrak{b} + \mathfrak{j} \operatorname{Sin} \mathfrak{b}),$$

so dass also

$$S\mathfrak{q} = T\mathfrak{q} . \operatorname{Cos} \mathfrak{b}, \quad V\mathfrak{q} = T\mathfrak{q} . \operatorname{Sin} \mathfrak{b} . \mathfrak{j}$$

ist. Damit haben wir auch die longimetrische Quaternion in eine Summe aus einer Zahl und einem Vector zerlegt. Nur wenn β auf α fällt, wird die Quaternion zu einem Scalar; und nur wenn β in der Entfernung j ist, reducirt sie sich auf den Vector.

Die scheinbare Unbestimmtheit, die in Bezug auf die Länge des j herrscht, hat bei den goniometrischen Quaternionen ihr Entsprechendes. Es ist ja durchaus nicht nothwendig, den rechten Winkel als die Grundlage bei goniometrischen Betrachtungen einzuführen; und mit Annahme eines Winkels λ als Basis haben wir auch früher als Ausdruck für die goniometrische Quaternion $\beta : \alpha$ gefunden

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha} \cdot [{}^{\lambda}\operatorname{Cos}(\alpha\beta) + \mathfrak{j}_{\lambda} \, {}^{\lambda}\operatorname{Sin}(\alpha\beta)],$$

wo nun die rechts stehenden Ausdrücke sich mit λ ändern.

Die für die longimetrische Quaternion $\mathfrak{q} = \beta : \alpha$ gefundene Form

$$(T\beta : T\alpha) \, (\operatorname{Cos} \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{j} \operatorname{Sin} \mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

lässt sich auch schreiben

$$\mathfrak{q} = T\mathfrak{q} . (\operatorname{Cos} \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{j} \operatorname{Sin} \mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

und lässt dann erkennen, dass

$$\operatorname{Cos} \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{j} \operatorname{Sin} \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

ein Ausdruck für $U\mathfrak{q}$ ist, d. h. für einen Verschieber um die Länge $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

3. — Zerlegt man β in die drei Parallelvectoren β_0, β_1, β_2, deren Anfänge bezüglich in $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ sind, welche letztere drei Punkte aber mit $\mathfrak{b}$ in einer Ebene liegen müssen, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \beta_2}{\alpha} = \frac{\beta_0}{\alpha} + \frac{\beta_1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha};$$

und da

$$T\beta_0 = T\beta . \operatorname{Cos}_0 \mathfrak{b}, \quad T\beta_1 = T\beta . \operatorname{Cos}_1 \mathfrak{b}, \quad T\beta_2 = T\beta . \operatorname{Cos}_2 \mathfrak{b},$$

so erhalten wir, wenn α selbst seinen Anfang in $\mathfrak{a}_0$ hat,

$$\beta : \alpha = (T\beta : T\alpha) \, (\operatorname{Cos}_0 \mathfrak{b} + \mathfrak{j}_1 \operatorname{Cos}_1 \mathfrak{b} + \mathfrak{j}_2 \operatorname{Cos}_2 \mathfrak{b}),$$

wobei wir die Quotientvectoren $\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_2$ mit $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ bezeichnen, während die auf der rechten Seite stehenden Planfunctionen des Punktes $\mathfrak{b}$ auf das Dreieck $\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ bezogen sind.

Zerlegt man endlich β in die Parallelvectoren β_0, β_1, β_2, β_3, die ihre Anfänge in den Eckpunkten a_0, a_1, a_2, a_3 eines beliebig gelegenen Tetraeders haben, so ist, wenn α wieder in a_0 beginnt,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha} \cdot (\mathrm{Cos}_0\, b + j_1\, \mathrm{Cos}_1\, b + j_2\, \mathrm{Cos}_2\, b + j_3\, \mathrm{Cos}_3\, b),$$

worin die Raumfunctionen des Punktes b nun auf das Tetraeder $a_0\, a_1\, a_2\, a_3$ bezogen sind, während j_1, j_2, j_3 die Quotientvectoren $a_0\, a_1$, $a_0\, a_2$, $a_0\, a_3$ bezeichnen.

Damit wäre auch eine viergliedrige Normalform für longimetrische Quaternionen aufgestellt, deren Aehnlichkeit mit der Normalform der Hamilton'schen Quaternionen klar vorliegt, und deren Herleitung aus einer besonderen Form der goniometrischen Quaternionen schon in §. 54, 8 erfolgte, wo uns nur die Bedeutung des j als eines Quotientvectoren noch mangelte.

4. — Aus der viergliedrigen Normalform der Quaternion $\beta : \alpha$ ergiebt sich

$$\beta = T\beta \cdot (\mathrm{Cos}_0\, b + j_1\, \mathrm{Cos}_1\, b + j_2\, \mathrm{Cos}_2\, b + j_3\, \mathrm{Cos}_3\, b) \cdot U\alpha.$$

Dabei dient $U\alpha$ nur dazu, die für α und β gemeinschaftliche Richtung festzustellen.

Ist $T\beta$ gleich eins, so haben wir

$$U\beta = (\mathrm{Cos}_0\, b + j_1\, \mathrm{Cos}_1\, b + j_2\, \mathrm{Cos}_2\, b + j_3\, \mathrm{Cos}_3\, b) \cdot U\alpha.$$

Mit diesem Ausdruck ist also der Tensor eines Vectors zu multipliciren, um auszudrücken, dass er seinen Anfang in dem Punkte b hat und parallel zu α geht. Man könnte daher den Coefficienten an $U\alpha$ als einen Repräsentanten des Punktes b auffassen, und wir hätten damit ein Mittel gefunden, um die Punkte des Raumes zahlenmässig darzustellen. Freilich ist diess nur eine Darstellung derselben in Bezug auf das Grundtetraeder $a_0\, a_1\, a_2\, a_3$, und die Punkte aufgefasst als Endpunkte der von a_0 ausgehenden Quotientvectoren.

Der an $U\alpha$ stehende viergliedrige Factor ist ein Versor, der $U\alpha$ von a_0 nach b schiebt.

Damit ist der Beweis geliefert, dass sich jeder von a_0 ausgehende Versor mit Hilfe dreier diplanaren Elementaren darstellen lässt, welche ihren Anfang in a_0 haben.

Um den Versor zu erhalten, der von dem Punkte b nach dem Punkte c schiebt, haben wir nur den Ausdruck für den Quotientvector $a_0\, c$ zu dividiren durch den Ausdruck für $a_0\, b$ und erhalten mit Hilfe des erweiterten Moivre'schen Satzes

$$bc = \mathrm{Cos}_0\,(c-b) + j_1\, \mathrm{Cos}_1\,(c-b) + j_2\, \mathrm{Cos}_2\,(c-b) + j_3\, \mathrm{Cos}_3\,(c-b).$$

5. — Dass der erweiterte Moivre'sche Satz, wie wir ihn in den §. 31, 1, §. 38, 3 und §. 41, 2 für longimetrische Functionen bewiesen

haben, allgemein für die Versoren longimetrischer Quaternionen in ihrer zwei-, drei- oder viergliedrigen Form gilt, bedarf keines besonderen Nachweises, da die in den entwickelten Versoren vorkommenden Grössen alle die Eigenschaften besitzen, welche wir in den genannten Paragraphen bei Herleitung des Satzes vorausgesetzt haben. Doch lässt sich hier die Richtigkeit jener Sätze, unter Voraussetzung der Eigenschaften der Versoren und Elementaren, leicht anschaulich direct darthun. Es ist für die drei parallelen und in a, b, c anfangenden Vectoren α, β, γ

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{T\gamma}{T\alpha} \cdot (\mathrm{Cos}_0\, ac + j_1 \mathrm{Cos}_1\, ac + j_2 \mathrm{Cos}_2\, ac + j_3 \mathrm{Cos}_3\, ac),$$

während wir für $(\gamma : \beta)$ $(\beta : \alpha)$ setzen können das Product der Ausdrücke

$$(T\gamma : T\beta) \cdot (\mathrm{Cos}_0\, bc + j_1 \mathrm{Cos}_1\, bc + j_2 \mathrm{Cos}_2\, bc + j_3 \mathrm{Cos}_3\, bc),$$
$$(T\beta : T\alpha) \cdot (\mathrm{Cos}_0\, ab + j_1 \mathrm{Cos}_1\, ab + j_2 \mathrm{Cos}_2\, ab + j_3 \mathrm{Cos}_3\, ab).$$

Da aber $ac = ab + bc$, so ist hiermit die Richtigkeit des bekannten Lehrsatzes bewiesen, wonach in abgekürzter Form

$$\mathrm{CjS}\, ab \cdot \mathrm{CjS}\, bc = \mathrm{CjS}(ab + bc) = \mathrm{CjS}\, ac.$$

Aus Vorstehendem geht zugleich hervor, dass den Elementaren j alle die Eigenschaften zukommen, die wir in der ersten Abtheilung für diese Factoren aufgestellt haben, und dass wir, wo diess nöthig erscheinen sollte, für diese Elementarversoren auch den algebraischen Ausdruck $\sqrt[\infty]{-1}$ einführen dürfen.

Schliesslich wollen wir noch erwähnen, dass wir den Moivre'schen Satz in seiner Anwendung auf longimetriche Functionen jetzt auch noch in andrer Form schreiben können. In der allgemeinsten Fassung hatten wir denselben ausgedrückt durch

$$\mathrm{CjS}\, m \cdot \mathrm{CjS}\, n = \mathrm{CjS}\,(m + n),$$

oder frei von der dem m und n anhaftenden Unbestimmtheit

$$\mathrm{CjS}\,(a_0 m) \cdot \mathrm{CjS}\,(a_0 n) = \mathrm{CjS}\,(a_0 m + a_0 n).$$

Dabei sind $a_0 m$ und $a_0 n$ Differenzvectoren. Fassen wir dieselben dagegen als Quotientvectoren auf, so würde die rechte Seite dieser Gleichung zu $\mathrm{CjS}(a_0 m \cdot a_0 n)$ werden. Ebenso würden wir jetzt schreiben können

$$[\mathrm{CjS}\,(a_0 m)]^p = \mathrm{CjS}\,(a_0 m)^p.$$

Für die Addition der Vectoren β und γ würden wir finden

$$\beta + \gamma = (T\beta \cdot \mathrm{CjS}\, b + T\gamma \cdot \mathrm{CjS}\, c)\, U\alpha$$
$$= (T\beta + T\gamma) \cdot \mathrm{CjS} \frac{T\beta \cdot a_0 b + T\gamma \cdot a_0 c}{T\beta + T\gamma} \cdot U\alpha,$$

worin jetzt $a_0 b$ und $a_0 c$ Quotientvectoren darstellen.

6. — Mit Hilfe der Normalformen

$$q = (T\beta : T\alpha)\ (\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} + j\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{b})$$

oder

$$q = (T\beta : T\alpha)\ (\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{b} + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{b} + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b} + j_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{b})$$

kann man nun auch leicht Ausdrücke für die verwandten Quaternionen angeben. So ist die reciproke Quaternion

$$q^{-1} = (Tq)^{-1}\,(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} + j\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{b})^{-1} = Tq^{-1}\,.\,[\mathrm{Cos}(-\mathfrak{b}) + j\,\mathrm{Sin}(-\mathfrak{b})],$$

wo statt $-\mathfrak{b}$ auch $-\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}$ gesetzt werden kann, je nachdem man $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ als Differenz- oder als Quotientvector ansieht.

Es ergeben sich ferner mit Hilfe der Normalform

$$\begin{aligned} Kq &= Tq\,.\,[\mathrm{Cos}(-\mathfrak{b}) + j\mathrm{Sin}(-\mathfrak{b})] = Tq\,.\,[\mathrm{Cos}(-\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + j\mathrm{Sin}(-\mathfrak{a}\mathfrak{b})] \\ &= Tq\,.\,[\mathrm{Cos}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) + j\,\mathrm{Sin}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})]; \\ q + Kq &= Tq\,.\,[\mathrm{Cos}(+\mathfrak{b}) + \mathrm{Cos}(-\mathfrak{b})] = Tq\,.\,(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} + 1 + \mathrm{Sin}\,\mathfrak{b}) = 2\,Tq; \\ q\,.\,Kq &= Tq^2\,.\,(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} + j\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{b})\,.\,[\mathrm{Cos}(-\mathfrak{b}) + j\,\mathrm{Sin}(-\mathfrak{b})] = (Tq)^2; \\ q - Kq &= Tq\,.\,[\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} + j\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{b} - \mathrm{Cos}(-\mathfrak{b}) - j\,\mathrm{Sin}(-\mathfrak{b})] \\ &= 2\,Tq\,.\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{b}\,.\,(j-1), \end{aligned}$$

wodurch dann auch der Zusammenhang zwischen $q - Kq$ und $j - 1$ nachgewiesen ist.

Aus der viergliedrigen Normalform der longimetrischen Quaternionen finden wir noch $Sq = Tq\,.\,\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{b}$, während

$$\begin{aligned} Vq &= Tq\,.\,(j_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{b} + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b} + j_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{b}), \\ TVq &= Tq\,.\,(\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{b} + \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b} + \mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{b}) = Tq\,.\,\mathrm{Sin}_0\,\mathfrak{b}, \\ Uq &= \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{b} + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{b} + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b} + j_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{b}, \\ SUq &= \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{b}, \\ VUq &= j_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{b} + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b} + j_3\,\mathrm{Cos}_3\,\mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Ist endlich

$$q = w + j_1 x + j_2 y + j_3 z,$$

so ist

$$Tq = w + x + y + z,$$

$$Uq = \frac{w + j_1 x + j_2 y + j_3 z}{w + x + y + z}.$$

Sind β und γ gleichlange und mit α parallele Vectoren, so ist

$$\begin{aligned} (\beta - \gamma) : \alpha = {} & (T\beta : T\alpha)\ (\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{b} + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{b} + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b}) \\ & - (T\gamma : T\alpha)\ (\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{c} + j_1\,\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{c} + j_2\,\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{c}), \end{aligned}$$

wobei j_1 und j_2 Versoren in der Ebene der Anfänge von α, β und γ vorstellen. Da aber $T\beta = T\gamma$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\beta - \gamma) : \alpha = {} & (T\beta : T\alpha)\,.\,[\mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{c} + j_1\,(\mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{c}) \\ & + j_2\,(\mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{c})]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{b} &= 1 - \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{b}, \\ \mathrm{Cos}_0\,\mathfrak{c} &= 1 - \mathrm{Cos}_1\,\mathfrak{c} - \mathrm{Cos}_2\,\mathfrak{c}; \end{aligned}$$

mithin haben wir

$$(\beta - \gamma) : \alpha = (T\beta : T\alpha)\ [(j_1 - 1)\,(\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{c}) + (j_2 - 1)\,(\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{c})]$$
$$= T\beta : T\alpha\,.\,[k_1\,(\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_1 \mathfrak{c}) + k_2\,(\mathrm{Cos}_2 \mathfrak{b} - \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{c})].$$

Damit ist dann der Nachweis geführt, dass der Quotient aus der Differenz zweier gleichen parallelen Vectoren und einem dritten Parallelvector zu den Werthen gehört, die mit einander multiplicirt Null ergeben. (Vergl. §. 65, 3.)

7. — Abweichend von den goniometrischen Quaternionen lassen sich die longimetrischen auch in ein Product von vier Factoren zerlegen. Es ist nämlich

$$q = \beta : \alpha = Tq\,.\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = Tq\,.\,j^m,$$

wo m nun so gewählt ist, dass j^m den Quotientvector $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ angiebt, d. h. es ist m das Längenverhältniss von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und j. Es lässt sich aber auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ausdrücken mit Hilfe der drei mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ coinitialen Vectoren j_1, j_2, j_3; und zwar erhalten wir

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = j_1^{\xi}\,.\,j_2^{\eta}\,.\,j_3^{\zeta},$$

wobei ξ, η und ζ die Masszahlen der Coordinaten des Punktes $\mathfrak{b}$ in Bezug auf ein in $\mathfrak{a}$ beginnendes Coordinatensystem sind, dessen drei Axen in die Richtungen von j_1, j_2 und j_3 fallen.

Wie sich umgekehrt aus

$$q = Tq\,.\,j_1^{\xi}\,.\,j_2^{\eta}\,.\,j_3^{\zeta}$$

die viergliedrige Normalform ableiten lässt, ist schon §. 41, 4 gezeigt worden.

Nicht uninteressant ist schliesslich auch nachfolgende Zerlegung der longimetrischen Quaternionen. Es ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_0 + \beta'}{\alpha} = \frac{\beta_0}{\alpha} + \frac{T\beta'}{T\alpha}\,j,$$

wobei j der Längeneinheit in der Richtung $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ entspricht.

Nun lässt sich der Quotientvector j zerlegen in drei Factoren nach den Richtungen von j_1, j_2 und j_3. Sind die Verhältnisszahlen dieser Projectionen zu j_1, j_2 und j_3 bezüglich x, y und z, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta_0}{T\alpha} + \frac{T\beta'}{T\alpha}\,.\,j_1^{x}\,.\,j_2^{y}\,.\,j_3^{z}\,.$$

Stehen die drei Vectoren j_1, j_2 und j_3 senkrecht aufeinander und haben gleiche Länge mit j, so werden x, y und z den Cosinussen der Winkel φ_1, φ_2, φ_3 proportional, welche $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit den Axen bildet, und wir erhalten dann

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha}\,(\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} + \mathrm{Sin}\,\mathfrak{b}\,.\,j_1^{\cos\varphi_1}\,.\,j_2^{\cos\varphi_2}\,.\,j_3^{\cos\varphi_3}),$$

ein Ausdruck, der volle Aehnlichkeit hat mit einer früher (§. 51, 1) gegebenen Form der goniometrischen Quaternionen.

Schliesslich wollen wir noch erwähnen, dass die zwei- oder viergliedrige Normalform der longimetrischen Quaternionen das Mittel giebt, um nachzuweisen, dass

$$S(q_1 + q_2) = Sq_1 + Sq_2,$$
$$V(q_1 + q_2) = Vq_1 + Vq_2,$$
$$K(q_1 + q_2) = Kq_1 + Kq_2,$$
$$T(q_1 + q_2) = Tq_1 + Tq_2,$$

wogegen $U(q_1 + q_2)$ nicht gleich $Uq_1 + Uq_2$ ist.

§. 67. Die Producte paralleler Differenzvectoren.

1. — Man kann das Product zweier parallelen Differenzvectoren auf verschiedene Weisen ableiten. Es ist

$$\beta . \alpha = (\beta : \alpha) . \alpha^2 = -T\beta . T\alpha . \mathfrak{ab} = -T\beta . T\alpha . (\operatorname{Cos} \mathfrak{ab} + \mathfrak{j} \operatorname{Sin} \mathfrak{ab}),$$

womit das Product $\beta . \alpha$ auf eine longimetrische Quaternion zurückgeführt ist.

Dasselbe Resultat ergiebt sich auch, indem wir β ersetzen durch $T\beta . \mathfrak{ab} . U\alpha$. Es ist nämlich

$$\beta . \alpha = T\beta . \mathfrak{ab} . U\alpha . \alpha = T\beta . T\alpha . \mathfrak{ab} . (U\alpha)^2 = -T\beta . T\alpha . \mathfrak{ab}.$$

Auch auf dem von Hamilton zur Ermittelung des Productes einander schneidender Differenzvectoren eingeschlagenen Wege lässt sich $\beta : \alpha$ finden. Wir können nämlich definiren $\beta . \alpha = \beta : \alpha^{-1}$ und erhalten dann

$$\beta . \alpha = \beta : \alpha^{-1} = \beta : (T\alpha . U\alpha)^{-1} = T\beta . T\alpha . U\beta : (U\alpha)^{-1}$$
$$= -T\beta . T\alpha . (U\beta : U\alpha) = -T\beta . T\alpha . \mathfrak{ab}.$$

Wir könnten schliesslich das Product $\beta . \alpha$ dadurch herzuleiten suchen, dass wir β und α als die Indices zweier rechtwinkligen goniometrischen Quaternionen auffassten und das Product dieser Quaternionen als das der Vectoren betrachteten. Selbst als Indices der Logarithmen von zwei zu einander senkrechten Quotientvectoren (vergl. §. 59, 6) lassen sich die parallelen Vectoren α und β ansehen, und ihr Product lässt sich gleich dem Resultat der Multiplication dieser Logarithmen betrachten. In diesen beiden letzten Fällen müsste man freilich die in verschiedenen aber parallelen Ebenen befindlichen Quaternionen und Logarithmen dadurch von einander unterscheiden, dass man z. B. die dem Vector β entsprechende Elementare noch mit dem Verschiebungsfactor $\mathfrak{ab}$ multiplicirt denkt. Wir gehen aber nicht weiter auf diese Betrachtung ein, sondern erwähnen noch eine Schwierigkeit, zu der die zweite der obigen Ableitungen führen kann. Hätten wir in $\beta . \alpha$ nicht β durch α, sondern α durch β ausgedrückt, nämlich $\alpha = T\alpha . \mathfrak{ba} . U\beta$ gesetzt, so würden wir erhalten haben

$$\beta . \alpha = \beta . T\alpha . \mathfrak{ba} . U\beta = T\beta . T\alpha . U\beta . \mathfrak{ba} . U\beta.$$

Vertauscht man hierin die Factoren $U\beta$ und ba, so erhält man $T\beta . T\alpha . ba . (U\beta)^2$ oder $-T\beta . T\alpha . ba$, ein Ergebniss, welches nicht dasselbe ist, wie das früher für $\beta . \alpha$ gefundene. Der Grund hiervon kann nur in der Vertauschung von $U\beta$ und ba liegen, und wir ersehen daraus, dass wir diese Umstellung der Factoren nicht unbedingt vornehmen dürfen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich auch aus früheren Feststellungen. Es ist nämlich

$$ba . U\beta = (U\alpha : U\beta) . U\beta = U\alpha.$$

Dagegen ist

$$U\beta . ba = U\beta . (U\alpha : U\beta),$$

und in diesem letzten Ausdrucke ist es nicht gestattet $U\beta$ heraus fallen zu lassen. (Vergl. §. 47, 4). Wir kommen also zu dem Resultate, dass auch das Product aus einem Quotientvector und einem Differenzvector nicht commutativ, dass also $\beta . ba$ nicht gleich $ba . \beta$ ist. Dagegen lässt sich zeigen, dass

$$\beta . ab = ba . \beta.$$

Setzen wir nämlich $\varrho = \beta . ab$, so ist

$$\varrho . ba = \beta . ab . ba = \beta,$$
$$\varrho . ba . \beta = \beta^2 = -(T\beta)^2,$$
$$\varrho . ba . U\beta = -T\beta;$$

und da $ba = U\alpha : U\beta$, so haben wir

$$\varrho . (U\alpha : U\beta) . U\beta = \varrho . U\alpha = -T\beta,$$

mithin $$\varrho = -T\beta : U\alpha = T\beta . U\alpha.$$

Es ist aber $T\beta . U\alpha$ ein Vector, der mit $U\alpha$ zusammenfällt, aber die Länge von β hat, daher

$$T\beta . U\alpha = ba . \beta;$$

also ist $$\beta . ab = ba . \beta = ab^{-1} . \beta.$$

Will man also die Factoren eines Productes aus einem Quotient- und einem Differenzvector vertauschen, so muss man zugleich die Richtung des Quotientvectors umdrehen.

Mit Festhaltung dieser Regel ist

$$\beta . \alpha = \beta . ba . U\beta . T\alpha = T\beta . T\alpha . U\beta . ba . U\beta$$
$$= T\beta . T\alpha . ab . U\beta . U\beta = -T\beta\, T\alpha . ab;$$

diess ist aber dasselbe Resultat wie oben.

2. — Aus der Formel

$$\beta . \alpha = -T\beta . T\alpha . ab = -T\beta . T\alpha . (\operatorname{Cos} ab + j \operatorname{Sin} ab)$$

ergiebt sich sofort

$$\alpha . \beta = -T\beta . T\alpha . ba = -T\beta . T\alpha . (\operatorname{Cos} ba + j^{-1} . \operatorname{Sin} ba),$$

d. h. das Product paralleler Vectoren ist ebenfalls nicht commutativ. Dagegen sieht man leicht aus Vorstehendem, dass

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha = -T\beta . T\alpha . \operatorname{Cos} ab,$$
$$TV\alpha\beta = TV\beta\alpha = -T\beta . T\alpha . \operatorname{Sin} ab.$$

Hieraus folgt ferner, dass $S\alpha\beta = 0$, wenn $ab = j$, d. h. gleich der Längeneinheit ist.

Da $ab = K\,ba$, so ist auch

$$\alpha . \beta = K(\beta . \alpha);$$

und da $K\alpha = -\alpha$, $K\beta = -\beta$, so haben wir auch

$$K(\alpha . \beta) = \beta . \alpha = (-\beta)(-\alpha) = K\beta . K\alpha,$$

ein früher für Differenzvectoren allgemein bewiesener Satz.

Fällt α auf β, so bekommen wir

$$\beta\alpha = -T\beta . T\alpha,$$

da der Quotientvector von der Länge Null als Factor eins auftritt. Wird auch der Länge nach α gleich β, so erhalten wir den bekannten Ausdruck

$$\alpha^2 = -(T\alpha)^2.$$

Leicht ergeben sich auch folgende Resultate:

$$\alpha\beta + \beta\alpha = -T\alpha . T\beta (ba + ab) = -2T\alpha . T\beta;$$

$$\beta\alpha - \alpha\beta = -T\alpha . T\beta (ab - ba) = -T\alpha\, T\beta (ab^2 - 1)\, ba$$
$$= -T\alpha . T\beta (2ab - 2)\, ba = -2T\alpha\, T\beta (1 - ba).$$

Das rechts stehende letzte Ergebniss gehört aber zu den Werthen (Vergl. §. 65, 3), deren Quadrat Null ist, wie wir auch daraus schliessen konnten, dass links die Differenz $\beta\alpha - K\beta\alpha$ steht.

Schliesslich ist

$$\beta\alpha . \beta\alpha = T\alpha^2 . T\beta^2 . ab^2,$$

während

$$\alpha\beta . \beta\alpha = T\alpha^2 . T\beta^2.$$

3. — Bei einem Producte dreier Factoren $\gamma\beta\alpha$ wird bei verschiedener Aufeinanderfolge der Factoren ein verschiedenes Ergebniss zu Tage treten. Es fragt sich, ob dagegen die Association der Factoren zulässig ist, ob also

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha.$$

Nun ist

$$\gamma(\beta\alpha) = -\gamma . ab . T\beta . T\alpha = -ba . \gamma . T\beta . T\alpha$$
$$= -T\gamma . T\beta . T\alpha . U\beta',$$

wo β' ein Vector in dem Punkte b' ist, der im Endpunkte der von b ausgehenden doppelten Mittellinie liegt. Auf der anderen Seite finden wir

$$(\gamma\beta)\alpha = -T\gamma . T\beta . bc . \alpha = -T\gamma . T\beta . T\alpha . U\beta'.$$

Es ist also $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$, das assosiative Princip ist mithin anwendbar auf die Producte paralleler Differenzvectoren.

Das vorstehende Resultat für $\gamma\beta\alpha$ hätten wir auch folgendermassen erreichen können. Es ist, wenn wir ab und ac als Quotientvectoren mit j_1 und j_2 bezeichnen,

$$\gamma\beta\alpha = T\gamma . j_2 U\alpha . T\beta j_1 U\alpha . T\alpha . U\alpha$$
$$= T\gamma . T\beta . T\alpha . j_2 . U\alpha . j_1 (U\alpha)^2$$
$$= -T\gamma . T\beta . T\alpha . j_2 . j_1^{-1} . U\alpha = -T\gamma . T\beta . T\alpha . ab' . U\alpha,$$

was mit dem obigen Resultate übereinstimmt.

Von den sechs Permutationen des Productes $\gamma\beta\alpha$ ergeben je zwei dasselbe Resultat, welche denselben Vector in der Mitte haben. Sp ist

$$\gamma\beta\alpha = \alpha\beta\gamma = -\,\mathrm{TP}\,.\,\mathrm{U}\beta',$$
$$\gamma\alpha\beta = \beta\alpha\gamma = -\,\mathrm{TP}\,.\,\mathrm{U}\alpha',$$
$$\alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha = -\,\mathrm{TP}\,.\,\mathrm{U}\gamma',$$

wobei wir mit T P den Tensor des Productes bezeichnet haben, während α' und γ' analoge Bedeutung haben wie β'.

Das Product von vier Vectoren führt zu einem Quotientvector, indem

$$\delta\gamma\beta\alpha = \mathrm{T}\delta\,.\,\mathrm{T}\gamma\,.\,\mathrm{cb}\,.\,\mathrm{T}\beta\,.\,\mathrm{T}\alpha\,.\,\mathrm{ab}$$
$$= \mathrm{TP}\,.\,\mathrm{cb}\,.\,\mathrm{ab} = \mathrm{TP}\,.\,\mathrm{ae},$$

wo ae die dritte Seite in einem Dreiecke ist, dessen zwei erste Seiten ab und cb sind.

Je nachdem also die Zahl der Factoren eine gerade oder ungerade ist, erhalten wir als Product paralleler Differenzvectoren einen Quotientvector oder einen Differenzvector, multiplicirt mit dem Producte der Tensoren der Factoren.

4. — Das distributive Princip ist für parallele Differenzvectoren giltig in der Form

$$(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta.$$

Lassen wir nämlich die Anfänge der vier Einheitsvectoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in a, b, c, b sein, so ist

$$(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta) = 2\mu\,.\,2\nu = 4\mu\,.\,\nu = -\,4\,\mathrm{nm},$$

wenn m und n die Halbirungspunkte der Strecken ab und cb sind. Es ist aber auch

$$\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta = -\,\mathrm{ca} - \mathrm{cb} - \mathrm{ba} - \mathrm{bb}$$
$$= -\,2\mathrm{cm} - 2\mathrm{bm} = -\,4\,\mathrm{nm},$$

wobei die rechts stehenden Vectoren als Quotientvectoren aufgefasst und addirt wurden. Es ist mithin in der That das distributive Princip giltig bei der Multiplication von Aggregaten aus parallelen Einheitsvectoren. Für Vectoren von verschiedener Länge lässt sich der Satz leicht auch als richtig zeigen unter Zerlegung der Vectoren in Tensor und Versor. Mit Benutzung des distributiven Principes finden wir z. B.

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2$$
$$= -\,(\mathrm{T}\alpha)^2 - (\mathrm{T}\beta)^2 - 2\,\mathrm{T}\alpha\,.\,\mathrm{T}\beta,$$

wovon man sich auch leicht direct überzeugen kann.

5. — Ein Ausdruck für das Product beliebiger paralleler Vectoren lässt sich auch dadurch finden, dass man die Vectoren erst nach zwei, drei oder vier Grundpunkten zerlegt. So ist z. B., wenn

$$\varrho_1 = \mathrm{x}_1\alpha + \mathrm{y}_1\beta, \qquad \varrho_2 = \mathrm{x}_2\alpha + \mathrm{y}_2\beta,$$

$$\begin{aligned}\varrho_2\varrho_1 &= x_2x_1\alpha^2 + y_2y_1\beta^2 + x_2y_1\alpha\beta + y_2x_1\beta\alpha\\ &= -x_2x_1 - y_2y_1 - x_2y_1\,\mathfrak{b}\alpha - y_2x_1\alpha\mathfrak{b}\\ &= -x_1x_2 - y_1y_2 - (x_2y_1\,\mathfrak{b}\alpha^2 + y_2x_1)\,.\,\alpha\mathfrak{b}\\ &= -x_1x_2 - y_1y_2 - [x_2y_1(2\mathfrak{b}\alpha - 1) + y_2x_1]\alpha\mathfrak{b}\\ &= -x_1x_2 - y_1y_2 - 2x_2y_1 + (x_2y_1 - y_2x_1)\,\alpha\mathfrak{b}.\end{aligned}$$

Scheidet man dagegen $\mathfrak{b}\alpha$ statt $\alpha\mathfrak{b}$ aus, so erhält man

$$\varrho_2\varrho_1 = -x_1x_2 - y_1y_2 - 2y_2x_1 + (y_2x_1 - x_2y_1)\,\mathfrak{b}\alpha.$$

Dass beide Werthe einander gleich sind, folgt daraus, dass sich

$$2x_2y_1 + (y_2x_1 - x_2y_1)\,\alpha\mathfrak{b} = 2y_2x_1 + (x_2y_1 - y_2x_1)\,\mathfrak{b}\alpha$$

durch Reduction auf die bekannte Gleichung

$$2 = \alpha\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\alpha$$

zurückführen lässt.

Für $\varrho_1\,\varrho_2$ erhält man dagegen

$$-x_1x_2 - y_1y_2 - 2x_1y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\alpha\mathfrak{b}$$

oder

$$-x_1x_2 - y_1y_2 - 2x_2y_1 + (x_2y_1 - x_1y_2)\,.\,\mathfrak{b}\alpha.$$

Wird ϱ_1 identisch mit ϱ_2, so bekommen wir

$$\varrho_1^2 = -x_1^2 - 2x_1y_1 - y_1^2 = -(x_1 + y_1)^2.$$

Stellt man ϱ_1 und ϱ_2 dar durch

$$\varrho_1 = T\varrho_1\,.\,(\alpha\,\mathrm{Cos}\,m_1 + \beta\,\mathrm{Sin}\,m_1),\quad \varrho_2 = T\varrho_2\,.\,(\alpha\,\mathrm{Cos}\,m_2 + \beta\,\mathrm{Sin}\,m_2),$$

so findet man

$$\varrho_2\varrho_1 = -T\varrho_2\,.\,T\varrho_1\,.\,[\mathrm{Cos}\,(m_1 - m_2) + \alpha\mathfrak{b}\,\mathrm{Sin}\,(m_1 - m_2)],$$

während $\varrho_1\,\varrho_2$ zu

$$-T\varrho_1\,.\,T\varrho_2\,.\,[\mathrm{Cos}\,(m_2 - m_1) + \mathfrak{b}\alpha\,\mathrm{Sin}\,(m_2 - m_1)]$$

führt.

6. — Einige einfachen Beispiele aus der analytischen Geometrie mögen die Verwendbarkeit der Rechnung mit parallelen Differenzvectoren und ihren Quaternionen noch zeigen.

(I.) Wir setzen im Folgenden ein parallelaxiges Coordinatensystem der Geraden voraus, dessen Axen den Abstand eins haben, während die Einheitsvectoren α und β nach Anfang und Richtung mit der x und mit der y Axe zusammenfallen. Dann ist ein beliebiger Vector ϱ, der seinen Anfang im Punkte $\mathfrak{r}$ der Mittellinie hat, der Repräsentant einer Geraden, welche die Coordinaten $x = T\varrho\,.\,\mathrm{Cos}\,\mathfrak{r}$, $y = T\varrho\,.\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{r}$ hat. Ist ferner δ ein beliebiger Vector, so stellt $t\delta$ einen Vector mit demselben Anfange $\mathfrak{b}$ auf der Mittellinie dar, aber von t facher Länge wie δ. Lassen wir dann δ und $t\delta$ die Vertreter oder Vectoren von Geraden sein, so schneiden diese beiden Geraden einander in demselben Punkte $\mathfrak{b}_1$ der Mittellinie, wie sich leicht daraus ergiebt, dass $\mathrm{Tg}\,\mathfrak{b}_1 = -\mathrm{Cos}\,\mathfrak{b} : \mathrm{Sin}\,\mathfrak{b}$. Setzen wir daher $\varrho = t\delta$ und nehmen t variabel an, so gilt diese Gleichung für alle durch den Punkt $\mathfrak{b}_1$ gehenden Geraden; sie kann also als die Gleichung dieses Punktes selbst betrachtet werden.

Statt $\varrho = t\delta$ kann auch $V\varrho\delta = 0$ als Gleichung des Punktes $\mathfrak{b}_1$ gelten, und ebenso $U\varrho = U\delta$, wie man leicht findet.

Im Folgenden bezeichnen wir oft eine Gerade, deren Vector ϱ ist, als die Gerade ϱ.

(II.) Die Gleichung $\varrho = \gamma + t\delta$,

worin t eine Variable bezeichnet, stellt denjenigen Punkt der Geraden γ dar, welcher den Punkt $\varrho = t\delta$ zur Projection auf der Mittellinie hat. Es ist nämlich $\varrho = \gamma + \delta$

eine Gerade, welche γ in einem Punkte schneidet, dessen Abstände von der x- und von der y Axe sich verhalten wie $-\operatorname{Cos}\mathfrak{b} : \operatorname{Sin}\mathfrak{b}$. Dasselbe gilt aber auch von

$$\varrho = \gamma + t\delta.$$

Ueberdiess trifft δ selbst die Mittellinie in einem Punkte, dessen longimetrische Tangente gleich $-\operatorname{Cot}\mathfrak{b}$, wodurch die obige Behauptung erwiesen ist.

(III.) Die Gleichung des Punktes $\varrho = \gamma + t\delta$ lässt sich auch auf die Form bringen

$$V(\varrho - \gamma) . \delta = 0,$$

weil $(\varrho - \gamma)\delta = t\delta^2 = -t(T\delta)^2$ ist.

Je nachdem

$$V(\varrho - \gamma)\alpha = 0, \quad \text{oder} \quad V(\varrho - \gamma)\beta = 0,$$

liegt daher der Punkt auf der x- oder auf der y-Axe. Die Gleichungen

$$V(\varrho - \gamma_1)\delta = 0 \quad \text{und} \quad V(\varrho - \gamma_2)\delta = 0$$

stellen Punkte auf den Geraden γ_1 und γ_2 dar, welche so liegen, dass ihre Verbindungslinie parallel den Axen geht, während

$$V(\varrho - \gamma)\delta_1 = 0 \quad \text{und} \quad V(\varrho - \gamma)\delta_2 = 0$$

verschiedene Punkte derselben Geraden γ bezeichnen.

(IV.) Um die Coordinaten der Geraden zu finden, welche durch die Punkte

$$\varrho_1 = \gamma_1 + t_1\delta_1 \quad \text{und} \quad \varrho_2 = \gamma_2 + t_2\delta_2$$

geht, müssen t_1 und t_2 so bestimmt werden, dass ϱ_1 und ϱ_2 die Vectoren derselben Geraden sind. Es muss daher $S\varrho_1\alpha = S\varrho_2\alpha$ und $S\varrho_1\beta = S\varrho_2\beta$ gesetzt und aus diesen Gleichungen t_1 und t_2 ermittelt werden.

(V.) Die Gleichung des Schnittpunktes von γ und δ (d. h. der Geraden mit den Vectoren γ und δ) ist

$$\varrho = (1-t)\gamma + t\delta.$$

Die drei Vectoren γ, δ, ε liefern daher Geraden, die durch einen Punkt gehen, wenn $\varepsilon = (1-t)\gamma + t\delta$,

oder wenn $M\gamma + N\delta + P\varepsilon = 0$,

und wenn zugleich $M + N + P = 0$.

(VI.) Um den Abstand p des Punktes $\varrho = \gamma + t\delta$ von der Mittellinie zu finden, suchen wir das ϱ derjenigen durch unseren Punkt gehenden

Geraden, welche der Mittellinie parallel läuft, für welche daher $S\varrho\alpha = S\varrho\beta$ oder

$$S\gamma\alpha + tS\delta\alpha = S\gamma\beta + tS\delta\beta.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$t = (S\gamma\alpha - S\gamma\beta) : (S\delta\beta - S\delta\alpha);$$

daher ist

$$\varrho = \gamma + \frac{S\gamma\alpha - S\gamma\beta}{S\delta\beta - S\delta\alpha} . \delta$$

das ϱ der gesuchten Geraden; und es ist

$$p = \tfrac{1}{2}T\varrho = \tfrac{1}{2}T(\gamma + \frac{S\gamma\alpha - S\gamma\beta}{S\delta\beta - S\delta\alpha} . \delta).$$

Da man (vergl. unten VIII)

$$-T\gamma = S\gamma\alpha + S\gamma\beta, \quad -T\delta = S\delta\alpha + S\delta\beta$$

setzen kann, so findet man

$$-p = (S\gamma\alpha\, S\delta\beta - S\gamma\beta S\delta\alpha) : (S\delta\beta - S\delta\alpha).$$

Wollen wir den axenparallelen Abstand des Punktes $\varrho = \gamma + t\delta$ von der Geraden ε haben, so bestimmen wir den Punkt $\varrho = \varepsilon + t\delta$ und suchen für beide Punkte die Abstände p_1 und p_2 von der Mittellinie; dann ist die Differenz $p_2 - p_1$ der gesuchte Abstand.

(VII.) Um einzelne durch den Punkt $\varrho = \gamma + t\delta$ gehende Geraden zu erhalten, braucht man nur t richtig anzunehmen. So ist die durch diesen Punkt und den Anfang von α gehende Gerade (welche den Axenabschnitt des Punktes auf der y Axe erzeugt) bestimmt durch

$$S\varrho\alpha = S\gamma\alpha + tS\delta\alpha = 0,$$

weil ϱ jetzt auf β liegt. Daher ist

$$t = -S\gamma\alpha : S\delta\alpha,$$

mithin

$$\varrho = \gamma - (S\gamma\alpha : S\delta\alpha) . \delta$$

der Vector auf β.

Um dagegen den Axenabschnitt auf α zu bekommen, d. h. den Vector der Geraden, die durch den Anfang von β und unseren Punkt geht, haben wir

$$S\varrho\beta = S\gamma\beta + tS\delta\beta = 0,$$

also

$$t = -S\gamma\beta : S\delta\beta,$$

mithin

$$\varrho = \gamma - (S\gamma\beta : S\delta\beta) . \delta$$

als Axenabschnitt auf der x Axe.

(VIII.) Aus der Gleichung des Punktes m

$$\varrho = \gamma + t\delta$$

lassen sich auch noch andre Formen der Gleichung dieses Punktes herleiten. Es ist, wenn r der Fusspunkt von ϱ ist,

$$S\varrho\alpha = -T\varrho . T\alpha . \operatorname{Cos} ar,$$
$$S\varrho\beta = -T\varrho . T\beta . \operatorname{Cos} br,$$

folglich

$$\frac{S\varrho\alpha}{-T\varrho . T\alpha} + \frac{S\varrho\beta}{-T\varrho . T\beta} = 1,$$

oder $$-T\varrho = S\varrho\alpha + S\varrho\beta,$$
da $T\alpha$ und $T\beta$ nach der Voraussetzung gleich eins sind. Es ist aber auch
$$S\varrho\alpha = S\gamma\alpha + tS\delta\alpha,$$
$$S\varrho\beta = S\gamma\beta + tS\delta\beta,$$
woraus durch Elimination von t sich ergiebt
$$\frac{S\varrho\alpha}{S\delta\alpha} - \frac{S\varrho\beta}{S\delta\beta} = \frac{S\gamma\alpha}{S\delta\alpha} - \frac{S\gamma\beta}{S\delta\beta}.$$
Diese Gleichung kann dazu dienen die Axenabschnitte und p zu finden.

So ist, z. B. wenn $T\varrho = 2p$ sein soll,
$$S\varrho\alpha = S\varrho\beta,$$
und wir finden
$$S\varrho\alpha = \frac{S\gamma\alpha\, S\delta\beta - S\gamma\beta\, S\delta\alpha}{S\delta\beta - S\delta\alpha}.$$

Nun ist aber
$$S\varrho\alpha = -T\varrho \,.\, T\alpha \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha\mathfrak{r} = -\tfrac{1}{2}T\varrho \,.\, T\alpha,$$
und da $T\varrho = 2p$, $T\alpha = 1$, so finden wir in der That für p den schon oben angegebenen Werth.

(IX.) Gehen wir aus der Ebene zum Raume über und beziehen die Vectoren auf ein System dreier parallelen Axen der x, y und z, die mit den Einheitsvectoren α, β und γ gleiche Anfänge und Richtung haben, so ist jetzt ϱ der Vertreter oder Vector einer Ebene, welche $x = T\varrho \,.\, \mathrm{Cos}_1\mathfrak{r}$, $y = T\varrho \,.\, \mathrm{Cos}_2\mathfrak{r}$, $z = T\varrho \,.\, \mathrm{Cos}_3\mathfrak{r}$ zu Coordinaten hat, wenn $\mathfrak{r}$ der Anfang von ϱ in dem Dreiecke a b c ist.

Gegenwärtig stellt
$$\varrho = t\varepsilon$$
die Gleichung derjenigen Geraden dar, in welcher die Fundamentalebene a b c geschnitten wird von der Ebene ε. Dagegen ist
$$\varrho = \delta + t\varepsilon$$
die Gerade in der Ebene δ, welche die Gerade $\varrho = t\varepsilon$ zur Projection hat.

Endlich ist
$$\varrho = \delta + t_1\varepsilon_1 + t_2\varepsilon_2$$
die Gleichung des Punktes, worin die Gerade $\varrho = \delta + t_1\varepsilon_1$ geschnitten wird von der Geraden $\varrho = \delta + t_2\varepsilon_2$.

Die Gleichung des Schnittpunktes der drei Ebenen δ, ε und φ ist
$$\varrho = (1-t)\delta + (t-u)\varepsilon + u\varphi,$$
während
$$M\delta + N\varepsilon + P\varphi + Q\varrho = 0,$$
wenn $M + N + P + Q = 0$, die Bedingungsgleichung dafür ist, dass die Ebenen δ, ε, φ und ϱ durch einen Punkt gehen.

(X) Als Gleichung des Kreises lässt sich die Formel geben
$$S\varrho\alpha \,.\, S\varrho\beta = r^2,$$
wenn der Abstand a b gleich 2r ist, und α und β selbst Einheitsvectoren sind, die senkrecht auf der Mittellinie stehen.

Allgemein ist

$$S\varrho\alpha \,.\, S\varrho\beta = \pm k^2$$

die Gleichung der Ellipse und der Hyperbel, während

$$AS\varrho\alpha \,.\, S\varrho\beta + BS\varrho\beta \,.\, S\varrho\gamma + CS\varrho\gamma \,.\, S\varrho\alpha = D$$

auf Flächen zweiter Classe führt.

§. 68. Gleichungen und Differentiale der Longiquaternionen.

1. — Die Lösung von Gleichungen, worin Longiquaternionen die Unbekannten sind, bietet nicht so grosse Schwierigkeiten wie die Lösung der Gleichungen mit goniometrischen Quaternionen, weil für die ersteren das commutative Princip gilt. So findet man z. B. hier leicht aus

$$aq + qb = c$$

für q den Werth $c : (a + b)$.

Doch werden auch für die neuen Quaternionen eigenthümliche und bei den gewöhnlichen Gleichungen nicht vorkommende Lösungen herbeigeführt durch die mehrfach erwähnte Eigenschaft, dass ein Product zu Null werden kann, ohne dass ein Factor desselben gleich Null ist. Letzgenannte Eigenthümlichkeit ist freilich nicht auf unsre Quaternionen beschränkt, sondern gilt, wie Hankel gezeigt hat, von allen denjenigen höheren complexen Zahlen, für welche die Potenzen der Einheiten sich durch diese Einheiten selbst ausdrücken lassen, wie hier z. B. j^n durch $nj - n + 1$.

Für die Lösung der Gleichungen mit Longiquaternionen gelten im Wesentlichen die §. 52, 2 und 3 gemachten Bemerkungen.

Je nachdem die in einer solchen Gleichung vom n ten Grade mit einander verbundenen Quaternionen als derselben Geraden, derselben Ebene oder dem Raume angehörig betrachtet werden, je nachdem führt die Lösung dieser Gleichung auf n^2, n^3, n^4 Wurzeln. So ergiebt z. B. $q^2 = 1$, wenn wir annehmen, dass q von der Form $x + jy$ ist, d. h., dass der Versor von q in die bekannte Richtung von j fällt,

$$q^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2(x + y)\,y \,.\, j = 1.$$

Hieraus folgern wir

$$x^2 - y^2 = 1,\ (x + y) \,.\, y = 0.$$

Die letzte Gleichung ergiebt $y = 0$, daher $x = \pm 1$; ausserdem aber $x + y = 0$ oder $x = -y$, welche Beziehung in $x^2 - y^2 = 1$ eingeführt zu $x = \pm\infty$ gelangen lässt. Wir erhalten daher als Lösungen unsrer Gleichung

$$q = \pm 1 \quad \text{und} \quad q = \pm(1 - j)\,x,$$

wenn in dem letzteren Falle x unendlich gross angenommen wird. Die Richtigkeit der zwei ersten Wurzeln sieht man leicht ein; dass aber auch

$\pm (1 - j)\, x$ für den genannten Werth von x eine richtige Lösung ist, findet man durch Einsetzen, indem in der That

$$x^2 (1 - j)^2 = 1,$$

oder

$$(1 - j)^2 = \frac{1}{x^2}$$

für $x = \infty$ zu dem uns bekannten richtigen Resultate $(1 - j)^2 = 0$ führt.

Die Aufstellung eigenthümlicher Methoden für diese Gleichungen muss weiteren Arbeiten auf diesem Gebiete überlassen bleiben; dabei werden die ausführlichen Vorarbeiten Hamilton's wol vielfach Anknüpfungspunkte bieten, namentlich auch für die Lösung von Gleichungen mit Parallelvectoren.

2. — Zur Ableitung der Differentiale von Functionen der Longiquaternionen legen wir die Newton'sche Definition zu Grunde, wonach, wenn $p = f(q)$,

$$\frac{dp}{dq} = \lim \frac{f(q + n^{-1} dq) - f(q)}{n^{-1} dq} = f'(q).$$

Dabei ist dq eine beliebige Quaternion. Da für Longiquaternionen bei der Multiplication das commutative Princip gilt, so sind hier in der That Differentialquotienten zulässig, und es haben dieselben die nämliche Form wie bei Functionen mit Scalarvariabeln. So ist z. B. für

$$p = q^m, \quad dp = m q^{m-1} . dq.$$

Leicht herleitbar sind auch die Differentiale von Ausdrücken, die nur der Rechnung mit Quaternionen eigenthümlich sind.

So ergiebt sich aus

$$q = Sq + Vq,$$

dass

$$dq = dSq + dVq.$$

Andrerseits ist aber auch

$$dq = Sdq + Vdq,$$

mithin

$$dSq = Sdq,$$

und

$$dVq = Vdq.$$

Aus

$$dTq = \lim \frac{T(q + n^{-1} dq) - Tq}{n^{-1} dq} dq$$

folgt leicht

$$dTq = Tdq.$$

Da ferner

$$q + Kq = 2Tq,$$

so ist

$$dKq = 2Tdq - dq = (dq + Kdq) - dq = Kdq.$$

Aus $q = Tq . Uq$ folgern wir

$$dq = Tdq . Uq + Tq . dUq,$$

also $$dUq = (dq - Uq \,.\, Tdq) : Tq;$$
und da $$dq = Tdq \,.\, Udq,$$
so ist $$dUq = (Tdq : Tq) \,.\, (Udq - Uq).$$

Da die Quotiale (§. 58, 12) der Functionen sich aus ihren Differentialen herleiten lassen, so bietet ihre Bildung nun auch keine Schwierigkeit.

3. — Um auch eine Anwendung der Differentialrechnung zu zeigen, benützen wir die Gleichung

$$\varrho = x\alpha + \frac{k}{x}\beta,$$

welche die Ellipse oder Hyperbel darstellt, je nachdem k positiv oder negativ ist. Dann haben wir

$$S\varrho\alpha = -x, \quad S\varrho\beta = -(k : x),$$

vorausgesetzt, dass α und β parallele Einheitsvectoren sind, deren Abstand gleich der Längeneinheit ist.

Hieraus ergiebt sich durch Multiplication

$$S\varrho\alpha \,.\, S\varrho\beta = k,$$

eine Quaternionengleichung für Ellipse und Hyperbel. Durch Differentiation erhalten wir aus derselben

$$S(d\varrho \,.\, \alpha) \,.\, S\varrho\beta + S\varrho\alpha \,.\, S(d\varrho \,.\, \beta) = 0,$$

oder

$$\frac{S\varrho\alpha}{S\varrho\beta} + \frac{S(d\varrho \,.\, \alpha)}{S(d\varrho \,.\, \beta)} = 0,$$

eine Gleichung, die sich auch schreiben lässt

$$\frac{S\varrho\alpha}{S\varrho\beta} + \frac{S\varrho'\alpha}{S\varrho'\beta} = 0.$$

Ihre Bedeutung ergiebt sich folgendermassen. Wir haben früher als Gleichung eines Berührungspunktes an der Curve $\varrho = f(t)$ gefunden

$$\varrho = \varrho_1 + z \,.\, \varrho_1'.$$

In dieser Gleichung ist ϱ_1 der Vector der zu dem Berührungspunkte gehörigen Tangente unserer Curve; es ist dagegen ϱ_1' der Vector einer zweiten Geraden, welche die Mittellinie in einem Punkte schneidet, der die Projection des Berührungspunktes auf der Mittellinie ist. (Vergl. hierüber §. 67, 7, II).

Es sind aber $S\varrho\alpha$ und $S\varrho\beta$ den Abschnitten der Geraden ϱ auf der x resp. der y Axe proportional; ebenso sind $S\varrho'\alpha$ und $S\varrho'\beta$ den Coordinaten der Geraden ϱ' verhältnissgleich. Die Werthe von $S\varrho'\alpha$ und $S\varrho'\beta$ sind aber auch, wie man sich leicht an einer Figur klar machen kann, den Stücken proportional, in welche die Gerade ϱ' die Mittellinie theilt, wobei das Vorzeichen dieser Stücke aber nicht zu berücksichtigen ist.

Es folgt daher aus

$$\frac{S\varrho\alpha}{S\varrho\beta} + \frac{S\varrho'\alpha}{S\varrho'\beta} = 0,$$

dass der Berührungspunkt das Stück der Tangente, welches zwischen den Axen liegt, im Verhältniss der anliegenden Coordinaten der Tangente theilt.

Dieselbe Gleichung

$$\varrho = \varrho_1 + z\varrho_1'$$

stellt die Tangente im Endpunkte von ϱ_1, oder den Berührungspunkt auf der Tangente (des Vectors) ϱ_1 dar, je nachdem $\varrho = f(t)$ die Gleichung der Curve in Punkt- oder in Tangentenvectoren ist. Während aber ϱ_1' im ersten Fall zur Angabe der Richtung der Tangente dient, bestimmt dieser Werth im zweiten Falle die Stelle des Berührungspunktes auf der Tangente. Bei der Beschreibung der Curve durch einen Punkt hat daher ϱ_1' die Richtung des Punktes in jedem Momente festzulegen, bei der Erzeugung der Curve durch eine sie berührende Gerade bestimmt dagegen ϱ_1' den Punkt, um welchen die Gerade in jedem Augenblicke rotirt.

§. 69. Rechnung mit parallelen Quotientvectoren.

1. — Mit Benutzung der in §. 57, 2 entwickelten Gesetze über die Rechnung mit Punkten erhalten wir für die Summe der parallelen Quotientvectoren a und b

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}'.\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'.\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}.\mathfrak{b}}.$$

Nun ist $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^2$, $\mathfrak{a}'.\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{b}'.\mathfrak{a} = \mathfrak{e}^2$, wenn $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e}$ bezüglich die Halbirungspunkte der Strecken $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}'$ sind. Wir haben daher

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{e}^2) : \mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{c}\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{c}\mathfrak{e})^2.$$

Nun ist $\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2$ ein Quotientvector von der doppelten Länge des $\mathfrak{c}\mathfrak{b}$, daher gleichlang mit a; ebenso ist $(\mathfrak{c}\mathfrak{e})^2$ von der Länge des b. Da aber die Summe zweier von demselben Punkte ausgehenden Quotientvectoren gleich dem mit zwei multiplicirten Quotientvector ist, welcher den Anfang der Summanden mit dem Halbirungspunkte des Abstandes ihrer Endpunkte verbindet, so erhalten wir

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = 2\mathfrak{c}\mathfrak{c}' = 2\mathfrak{c},$$

d. h. den mit zwei multiplicirten Quotientvector, welcher nach Grösse und Stellung mit der Mittellinie eines Trapezes zusammenfällt, dessen parallele Seiten a und b sind.

2. — Sind $\mathfrak{m}.\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}.\mathfrak{b}$ zu addiren, so haben wir

$$m.a + n.b = m.aa' + n.bb' = m.\frac{a'}{a} + n.\frac{b'}{b}$$
$$= \frac{m.a'.b + n.b'.a}{a.b} = m.\frac{b^2}{c^2} + n.\frac{e^2}{c^2}$$
$$= m.(cb)^2 + n.(ce)^2.$$

Nun sind $(cb)^2$ und $(ce)^2$ in c anfangende und mit a und b parallele und bezüglich gleichlange Quotientvectoren. Die Summe dieser mit Factoren behafteten Vectoren ist nach §. 58, 6 gleich $(m+n).cc'$, wenn c' den Abstand be im Verhältniss von n : m theilt.

Vorstehende Betrachtungen gelten auch für $m.a - n.b$; nur theilt jetzt c' den Abstand be äusserlich in dem angegebenen Verhältnisse. Als Werth für $a - b$ ergiebt sich daraus ein Vector von unendlicher Länge, aber mit dem Coefffcienten Null.

Durch richtige Wahl der Zahlen m und n kann daher $r = ma + nb$ zum Vector eines jeden Punktes der Mittellinie des Trapezes gemacht werden, welches a und b zu parallelen Seiten hat.

Dass die Addition paralleler Quotientvectoren eine commutative Operation ist, ergiebt sich aus dem Resultat dieser Rechnung.

3. — Als das Product zweier parallelen Quotientvectoren setzen wir

$$r = a.b = aa'.bb' = aa'.ac.bc.bb',$$

wo c in der Mitte von ab angenommen ist. Es sei nun

$$aa'.ac = aa'', \quad \text{und} \quad bc.bb' = bb''.$$

Verlegt man dann aa'' und bb'' in den Schnittpunkt ihrer Richtungen, so lässt sich durch Betrachtungen, die ganz denen analog sind, wonach man in der Mechanik zwei parallele Kräfte zusammensetzt, zeigen, dass dieses Product einen Quotientvector ergiebt, dessen Länge gleich der Summe der absoluten Längen von a und b ist, und dessen Anfang den Abstand ab im umgekehrten Verhältniss dieser Längen theilt. Aus diesem Ergebniss folgt dann sofort, dass

$$r = a.b = b.a,$$

d. h. dass die Multiplication paralleler Quotientvectoren commutativ ist. Aus der Regel über die Multiplication folgt auch leicht diejenige über die Division eines Quotientvectors durch einen parallelen.

Umgekehrt lässt sich jetzt jeder Quotientvector zerlegen in zwei Factoren a und b, die so liegen, dass

$$T(r^{\mathrm{Cos}\,r}) = Ta, \quad T(r^{\mathrm{Sin}\,r}) = Tb,$$

wenn die Functionen von r auf die Strecke ab bezogen sind.

Als das Product dreier parallelen Quotientvectoren a, b und c erhalten wir einen Vector r, der so liegt, dass

$$T(r^{\mathrm{Cos}_1 r}) = Ta, \quad T(r^{\mathrm{Cos}_2 r}) = Tb, \quad T(r^{\mathrm{Cos}_3 r}) = Tc,$$

wenn r der Anfang von r in dem Dreiecke abc ist.

Endlich ist $r = a \,.\, b \,.\, c \,.\, d$ ein Vector, der in einen Punkte r des Tetraeders a b c b seinen Anfang hat, für welchen die Raumcosinusse den Längen von a, b, c und d proportional sind, während die absolute Länge von r gleich der Summe der Längen der Factoren ist.

Umgekehrt lässt sich jeder beliebige Quotientvector in vier Factoren zerlegen, deren Anfänge in a, b, c, b sind.

4. — Wenn a und b Einheitsvectoren sind, so haben wir in

$$r = a^x \,.\, b^y$$

einen Vector von der Länge $x + y$ in einem Punkte, der den Abstand a b im umgekehrten Verhältniss der Exponenten theilt. Ebenso stellen

$$r = a^x \,.\, b^y \,.\, c^z \quad \text{und} \quad r = a^x \,.\, b^y \,.\, c^z \,.\, d^u$$

Quotientvectoren dar, deren Längen und Stellen im Raume durch die Exponenten vollständig bestimmt sind. Werden nun die Exponenten zu Functionen einer oder zweier Variabeln, so folgen die Vectoren r continuirlich aufeinander, und es bilden ihre Endpunkte Curven oder Flächen.

In Bezug auf die Gleichungen dieser Gebilde gilt nun aber dieselbe Bemerkung, die wir §. 60, 6 und 7 über die Gleichungen geometrischer Gebilde gemacht, wenn parallele Differenzvectoren benutzt wurden. Betrachtet man hier wie dort die Gebilde als Punktgebilde, so werden die Gleichuugen derselben zu complicirten Ausdrücken. Lässt man aber r den Vector der Geraden oder der Ebene sein, deren Coordinaten die longimetrischen Projectionen von r auf die Axen sind, welche wir zur Festlegung der Geraden und Ebenen benutzen, so gelangen wir zu einfachen und bekannten Relationen. So haben wir z. B. in

$$r = a^t \,.\, b^{1-t}$$

die Gleichung eines Punktes und in

$$r = a^t \,.\, b^{\pm \frac{1}{t}}$$

die Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel.

Bei der Untersuchung von Curven mit Hilfe dieser Gleichungen wird man mit Vortheil von den Quotialderivirten Gebrauch machen. Ist z. B. $r = f(t)$ die Gleichung einer Curve in Quotientvectoren, wobei diese Vectoren die Tangenten der Curve bestimmen, und seien r_1 und $r_1 \,.\, \vartheta r_1^{\frac{1}{n}}$ zwei dieser Vectoren, so haben wir in

$$r = r_1^{(1-z)} \left(r_1 \,.\, \vartheta r_1^{\frac{1}{n}}\right)^z = r_1 \left(\vartheta r_1^{\frac{1}{n}}\right)^z$$

die Gleichung des Schnittpunktes der Tangenten, deren Vectoren r_1 und $r_1 \,.\, \vartheta r_1^{\frac{1}{n}}$ sind. Dieser Schnittpunkt wird für $n = \infty$ zum Berührungspunkt der Tangente r_1. Nun ist aber

$$\vartheta r = (\vartheta t)^{\dot{f}(t)}$$

nach §. 58, 13; mithin ist die Gleichung des Berührungspunktes

$$r = r_1 \left(\vartheta t_1^{\frac{z}{n}}\right)^{f(t_1)}.$$

Setzt man hierin $\vartheta t_1^{\frac{z}{n}}$ an der Grenze gleich u, wo u nun eine Variable ist, deren einzelne Werthe zu den verschiedenen Geraden führen, die durch den Berührungspunkt gehen, so haben wir

$$r = f(t_1) \,.\, u^{f(t_1)} = r_1 \, u^{r_1}$$

als Gleichung des Berührungspunktes in Quotientvectoren. So finden wir z. B. aus der Kegelschnittsgleichung

$$r = a^t \,.\, b^{\frac{1}{t}}$$

als Gleichung des Berührungspunktes

$$r = a^{(1+lu)\,t_1} \,.\, b^{(1-lu):t_1}.$$

Setzt man hierin $u = e$, so wird $r = a^{2t_1}$; während für $u = 1 : e$ sich $r = b^{\frac{2}{t_1}}$ ergiebt, Resultate, die leicht eine geometrische Erläuterung zulassen. (Vergl. §. 60. 8).

5. — Der Logarithmus eines Quotientvectors in Bezug auf einen coinitialen Quotientvector als Basis ist nach §. 59 eine goniometrische Quaternion. Wir wollen noch kurz nachweisen, dass

$$^a\log b,$$

wenn a und b parallele Quotientvectoren sind, zu einer longimetrischen Quaternion führt. Setzen wir nämlich $^a\log b = q$, so folgt hieraus $a^q = b$. Es muss daher q aus einem reellen Factor bestehen, der a bis zur Länge des b streckt; ausserdem aber aus einem Factor, welcher das mit b längengleich gewordene a bis zum Zusammenfallen mit b verschiebt. Es muss mit anderen Worten der Exponent q von der Form

$$q = Tq \,.\, Uq$$

sein. Lassen wir aber einmal a, b und c drei längengleiche parallele Quotientvectoren darstellen, die so liegen, dass ihre Abstände ab und bc einander gleich sind, so ist

$$^a\log b = q \quad \text{und} \quad ^b\log c = q,$$

während

$$^a\log c = {}^b\log c \,.\, {}^a\log b = q^2.$$

Nun ist aber auch $b^2 : a = c$, also

$$^a\log c = {}^a\log(b^2) - 1 = 2q - 1,$$

mithin

$$q^2 = 2q - 1.$$

Da bei der Längengleichheit von a und b q ein Versor ist, so gilt also für diese neuen Versoren die Grundgleichung

$$(Uq)^2 = 2\,Uq - 1,$$

die wir auch als eine der Grundlagen der Theorie der longimetrischen

Quaternionen gefunden haben. Nach Erlangung dieses Resultates ist es aber ein Leichtes, für die Logarithmen der parallelen Quotientvectoren überhaupt die Giltigkeit aller für die Longiquaternionen bewiesenen Sätze nachzuweisen. Namentlich können wir jetzt setzen

$$^{a}\log b = \frac{Tb}{Ta} \cdot ab,$$

wo ab ein Quotientvector ist; und wir können allgemein behaupten, dass $^{a}\log b$ seinem Werthe nach identisch ist mit dem Quotienten der parallelen Differenzvectoren $\beta : \alpha$, wenn die letzteren Vectoren nach Grösse, Stelle und Richtung übereinstimmen mit b und a.

§. 70. Biquaternionen.

1. — Haben die Differenzvectoren α und β ihre Anfänge in a und b, ohne dass sie jedoch parallel sind, so lässt sich ihr Quotient $\beta : \alpha$ darstellen als das Product einer longimetrischen und einer goniometrischen Quaternion, mögen nun α und β noch derselben Ebene angehören, oder einander kreuzen. Es ist nämlich

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha},$$

wenn β' ein mit β gleichlanger und paralleler Vector ist, der aber seinen Anfang in a hat. Dann ist aber $Q = \beta : \beta'$ eine longimetrische, und $q = \beta' : \alpha$ eine goniometrische Quaternion, so dass

$$\beta : \alpha = Q \cdot q.$$

Dass die Factoren Q und q vertauschbar sind, geht scheinbar daraus hervor, dass wir auch

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} = q \cdot Q$$

setzen können, wenn α' parallel und gleichlang mit α ist, seinen Anfang aber in b hat. Doch bedarf dieses Resultat mit Rücksicht auf §. 67, 1 noch weiterer Untersuchungen.

Es ist also $\Omega = \beta : \alpha$ in der That gleich dem Producte aus einer Longi- und einer Gonioquaternion, wovon die erstere den Abstand der Anfänge der Vectoren α und β, die letztere den Winkel derselben misst. Der Name Biquaternion scheint daher nicht ungeeignet für einen solchen Quotienten kreuzender Vectoren.

Eine Biquaternion lässt sich zerlegen in ein Product

$$\Omega = T\Omega \cdot U\Omega = T\Omega \cdot UQ \cdot Uq,$$

worin $T\Omega$ nun wieder das Längenverhältniss von β und α angiebt, $U\Omega$ aber ein Factor ist, der einen damit multiplicirten Differenzvector um ab verschiebt und zugleich um den Winkel $(\alpha\beta)$ dreht. Lassen wir bei einer

solchen Ortsveränderung die Verschiebung und Drehung des Vectors gleichzeitig und gleichmässig vor sich gehen, so entsteht eine Art Schraubenbewegung. Die Drehung des Vectors erfolgt hierbei aber nur dann um die Richtung der Verschiebung, wenn α und β auf $\mathfrak{ab}$ senkrecht stehen.

Zerlegt man die Factoren von $\mathfrak{Q}$ in Binome so erhält man

$$\mathfrak{Q} = (T\beta : T\alpha)\ (\mathrm{Cos}\,\mathfrak{ab} + j\,\mathrm{Sin}\,\mathfrak{ab})\ [\cos(\alpha\beta) + i\sin(\alpha\beta)],$$

wobei j die Einheit der Quotientvectoren in der Richtung von $\mathfrak{ab}$ ist, i aber einen Differenzvector von der Längeneinheit angiebt, der senkrecht auf α und β steht. Sind α und β senkrecht zu $\mathfrak{ab}$, so fallen die Richtungen von i und j zusammen.

Denkt man sich in $\mathfrak{Q} = Q \,.\, q$ die rechte Seite ausmultiplicirt, so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{Q} = A + Bi + Cj + Dji,$$

von dem sich leicht die Bedeutung der einzelnen Theile nachweisen lässt. Ausführlicheres über diese Form der Biquaternionen findet sich in §. 35, 6.

Die allgemeinste Form einer Biquaternion wird erhalten, wenn man ihre Factoren Q und q in ihrer viergliedrigen Normalform darstellt. (Vergl. §. 39 und §. 42.) In der kürzesten Gestalt lässt sich dagegen $\mathfrak{Q}$ ausdrücken durch

$$\mathfrak{Q} = \beta : \alpha = (T\beta : T\alpha) \,.\, j^{\mathfrak{ab}} \,.\, i^{(\alpha\beta)} = (T\beta : T\alpha) \,.\, j^{v} \,.\, i^{w},$$

wenn wir die Masszahl von $\mathfrak{ab}$, letzteres bezogen auf j als Einheit, mit v, und das Mass des Winkels $(\alpha\beta)$, d. h. $2\varphi : \pi$, mit w bezeichnen.

2. — Aus $\beta : \alpha = \mathfrak{Q}$ finden wir

$$\beta = (T\beta : T\alpha)\, j^{\mathfrak{ab}} \,.\, i^{(\alpha\beta)} \,.\, \alpha,$$

und hieraus

$$\beta \,.\, \alpha = -\, T\alpha \,.\, T\beta \,.\, j^{\mathfrak{ab}} \,.\, i^{(\alpha\beta)}.$$

Dagegen ergiebt sich

$$\alpha \,.\, \beta = -\, T\alpha \,.\, T\beta \,.\, j^{\mathfrak{ba}} \,.\, i^{(\beta\alpha)},$$

also ein von $\beta \,.\, \alpha$ verschiedener Werth.

3. — Der Ausdruck

$$\beta = T\beta \,.\, j^{\mathfrak{ab}} \,.\, i^{(\alpha\beta)} \,.\, U\alpha = T\beta \,.\, j^{v} \,.\, i^{w} \,.\, U\alpha.$$

zeigt, dass wir nun im Stande sind, jeden beliebig im Raume gelegenen Differenzvector β auszudrücken mit Hilfe der Länge $T\beta$, eines Einheitsvectors $U\alpha$, der Länge und Richtung $\mathfrak{ab}$ und des Winkels $\alpha\beta$, letzteren natürlich nach seiner Grösse und der Stellung seiner Ebene betrachtet. Die Zahl der hierzu nöthigen Bestimmungsstücke ersieht man leichter, wenn man β darstellt in folgender Form

$$\beta = T\beta \,.\, j_1^{\xi} \,.\, j_2^{\eta} \,.\, j_3^{\zeta}\ (u + x\,i_1 + y\,i_2 + z\,i_3) \,.\, U\alpha.$$

Hierin stellen ξ, η und ζ die Masszahlen der Projectionen von $\mathfrak{ab}$ auf die Richtungen der Quotientvectoren j_1, j_2 und j_3 dar; u ist der Scalar der Gonioquaternion $\beta : \alpha$; x, y und z dagegen sind die Componenten

des Indexvectors dieser Quaternion nach den Richtungen der zu einander senkrechten Einheitsvectoren i_1, i_2 und i_3, letztere als Differenzvectoren aufgefasst.

Werden in dem Ausdrucke für β die Werthe $T\beta$, v und w, oder $T\beta$, ξ, η, ζ, x, y, z variabel, so bildet die Folge der dadurch dargestellten Vectoren im allgemeinen eine Fläche und zwar eine Regelfläche, oder vielmehr, so lange $T\beta$ endlich gedacht wird, einen Streifen einer solchen Fläche, begrenzt durch die Curven der Endpunkte von β. Werden die variabeln Stücke zu Functionen zweier unabhängig Variabeln, so treten die Regelflächen als einhüllende Gebilde auf und führen zu umhüllten Flächen.

Sind i und j von gleicher Richtung, so stellt z. B.

$$\varrho = j^t \cdot i^t \cdot \alpha$$

eine gerade Schraubenfläche oder vielmehr das Stück einer solchen Schraubenfläche dar, das von der Strecke α durchstrichen wird, wenn deren einer Endpunkt längs der Schraubenaxe gleichmässig fortschreitet. Doch kann allgemein eine solche Gleichung

$$\varrho = f(t) \cdot j^{\varphi(t)} \cdot i^{\psi(t)} \cdot \alpha$$

auch als die Gleichung der Curve aufgefasst werden, die der eine der beiden Endpunkte von ϱ beschreibt, während ϱ den genannten Streifen der Regelfläche erzeugt.

4. — Während wir jetzt das Product und den Quotienten kreuzender Vectoren bilden können, fehlt uns noch die Summe dieser Gebilde. Hier tritt nun die Eigenthümlichkeit auf, dass die Summe zweier Grössen nicht mehr zu einer Grösse derselben Art führt. Wir bekommen nämlich

$$\alpha + \beta = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha = (1 + \Omega)\,\alpha,$$

ein Ausdruck, der sich nicht wieder auf einen der bisherigen Vectoren zurückführen lässt. (Vergl. §. 42.)

Zu einem ähnlichen Resultate kommen wir auf folgendem Wege. Es ist

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta' + \beta - \beta' = \gamma + \beta - \beta'.$$

Hierin ist β' ein dem β gleicher und paralleler Vector mit dem Anfange in a; γ dagegen ist die Summe $\alpha + \beta'$. Wir erhalten also einen Differenzvector γ und die Differenz der gleichen und parallelen Vectoren β und β', welche letztere wir früher als eine Art Verschieber kennen gelernt haben. (Vergl. §. 60, 2 und §. 65, 3.)

Betrachten wir α und β als Vertreter von Rotationsgeschwindigkeiten, so lässt sich ihre Summe als eine Schraubengeschwindigkeit auffassen um eine Axe von bestimmter Lage. Denken wir uns diese Axe, auf der eine gewisse Länge die Grösse der Rotationsgeschwindigkeit angiebt, eine

andre Länge dagegen der Translationsgeschwindigkeit entspricht, so könnte ein solches Axenstück, das nun eine Art Doppellinie wäre, als Summe der kreuzenden Vectoren α und β dienen.

5. — Auch durch Verbindung von einander kreuzenden Quotientvectoren können wir zu Biquaternionen gelangen. Sind nämlich a und b zwei solche nicht parallele, also im Allgemeinen einander kreuzende Vectoren mit den Anfängen in a und b, so ist

$$^{a}\log b = {}^{b'}\log b \,.\, {}^{a}\log b' = Q \,.\, q,$$

wenn b' ein zu b paralleler und gleichlanger Quotientvector ist, dessen Anfang in a liegt. Dass dann nämlich Q eine Longiquaternion, q aber eine Gonioquaternion ist, folgt aus den Betrachtungen der §§. 59 und 69. Es ist mithin

$$\mathfrak{Q} = {}^{a}\log b = (Tb : Ta)\ (\cos \alpha\beta + j \sin \alpha\beta)\ [\cos(ab) + i \sin(ab)].$$

Hieraus ergiebt sich $b = a^{\mathfrak{Q}}$, und damit hätten wir ein Mittel gefunden, auch jeden beliebigen Quotientvector mit Hilfe von a und einer Biquaternion auszudrücken.

6. — Die Verbindung goniometrischer und longimetrischer Quaternionen gestattet schliesslich eine Verwendung zur Messung eines Winkels β durch einen beliebigen anderen α.

Während wir bisher alle Betrachtungen anschlossen an die Verbindung von Vectoren mit einander, d. h. also an Gebilde, die durch zwei Punkte bestimmt sind, kann man gerade so gut von Winkeln oder Keilen ausgehen, d. h. von Gebilden, die durch zwei Geraden, oder allgemein durch zwei Ebenen bestimmt werden.

Haben nämlich zwei Winkel α und β in einer Ebene denselben Scheitel, so ist $\beta : \alpha$ einfach eine Zahl, ein Scalar. In allen anderen Fällen wird man zu Quaternionen geführt, wovon man sich leicht für den Fall überzeugt, dass α und β zwar denselben Scheitel und auch einen gemeinschaftlichen Anfangsschenkel haben, aber in verschiedenen Ebenen liegen. Dann ist

$$q = \beta : \alpha = Tq \,.\, Uq,$$

worin Tq nun das absolute Verhältniss von $T\beta : T\alpha$ ist, während Uq der Drehfactor ist, welcher die Ebene des Winkels α in die Stellung der Ebene von β dreht. Liegt z. B. β in der über den gemeinschaftlichen Schenkel erweiterten Ebene von α, so wird die Drehungsrichtung von β zur negativen von α, und es wird dann in der That Uq zu -1.

Ueberhaupt kann man sich Winkel (und Keile) dargestellt denken durch ihre Indices, d. h. durch im Scheitel errichtete Senkrechten, die man, unter Berücksichtigung der Drehrichtung, den Grössen der Winkel proportional macht. Dann giebt es für die Winkel α und β so viel Lagen zu einander, als ihre Indices Lagen haben können. Die allgemeinste

Lage dieser Indexvectoren ist aber die, dass sie bei verschiedenen Anfängen einander kreuzen. Der Quotient zweier Winkel kann daher auf den Quotienten ihrer Indices zurückgeführt werden, vorausgesetzt, dass man vorher nachgewiesen, wie jede Verbindung zweier solcher Indices durch Rechnung schliesslich zu dem Index des durch directe Rechnung mit den Winkeln gefundenen Resultates führt. Da nun der Quotient kreuzender Differenzvectoren eine Biquaternion ist, so können wir auch das Resultat der Division eines Winkels durch einen beliebigen anderen als eine Biquaternion bezeichnen.

Der Ausdruck

$$\beta = T\beta \,.\, j^{ab} \,.\, i^{(\alpha\beta)} \,.\, U\alpha.$$

drückt jetzt allgemein den Winkel β aus mit Hilfe des Winkels $U\alpha$, des Tensors von β, des Abstandes der Scheitel und des Keiles $(\alpha\beta)$ zwischen den Ebenen der beiden Winkel.

Werden die Elemente des rechts stehenden Productes variabel, so erhalten wir bei continuirlicher Aenderung der unabhängig Variabeln in

$$\varrho = f(t) \,.\, j^{\varphi(t)} \,.\, i^{\psi(t)} \,.\, U\alpha$$

die Gleichung des von jenen Winkelebenen umhüllten Gebildes, im Allgemeinen einer abwickelbaren Fläche. Ob aber die vorstehenden Sätze für beliebig grosse Winkel, oder nur für unendlich kleine (und damit für Winkelgeschwindigkeiten) gelten, bedarf noch weiterer Untersuchungen.

§. 71. Rückblick.

1. — Eine Uebersicht über die Untersuchungen und Ergebnisse der zweiten Abtheilung wird uns zeigen, dass wir das elementare Gebiet der Rechnung mit Punkten und Vectoren mit einer gewissen Vollständigkeit so weit durchmessen haben, dass wir nun die Verbindung zweier Vectoren durch die Grundrechnungsarten in Form eines Vectors, einer Quaternion oder einer Biquaternion darstellen können, während die Rechnung mit Punkten wieder zu Punkten, oder zu Vectoren führt.

Von der Addition zweier Punkte ausgehend, haben wir allgemein $m \,.\, a \pm n \,.\, b = (m \pm n)\, c$ gesetzt, wo c den Abstand ab innerlich oder äusserlich im Verhältniss von $n : m$ theilt. Es ist diess die Grundlage des barycentrischen Calculs von Möbius.

Wenn für die Subtraction m gleich n wird, so führt vorstehende Regel auf einen unendlich fernen Punkt mit dem Coefficienten Null. Eine solche Differenz $b - a$ hat aber die Eigenschaft, durch Addition zu einem Punkte b eine Verschiebung desselben um die Länge und Richtung ab zu bewirken. Anstatt daher $b - a$ als einen unendlich fernen Punkt auf-

zufassen, kann man diese Differenz als einen Ausdruck für den Vector ab selbst ansehen, indem man diese Strecke nun nach Grösse und Richtung zugleich einen Additionsoperator für Punkte sein lässt. So gelangt man von der Rechnung mit Punkten zu der mit Differenzvectoren, von denen sich leicht zeigen lässt, dass $\alpha + \beta = \gamma$, d. h. dass die Summe zweier Vectoren gleich einem dritten ist, der mit den beiden ersten ein Dreieck bildet. Dieser Satz ist die Grundlage für die Addition und Subtraction der Differenzvectoren, wie diese Rechnung von Argand (1806), und unabhängig von ihm durch Bellavitis (1835), Möbius (1843) und H. Grassmann (1844) in die Wissenschaft eingeführt wurde.

Die Addition und Subtraction paralleler Differenzvectoren ist wol früher noch nicht als Mittel zu geometrischen Untersuchungen benutzt worden. Sie erfolgt hier nach dem Gesetze

$$m\alpha' \pm n\beta' = (m \pm n)\gamma',$$

wobei α', β' und γ' parallele Einheitsvectoren vorstellen und γ' den Abstand ab im umgekehrten Verhältniss der Coefficienten m und n theilt.

Die Verbindung zweier Differenzvectoren durch Multiplication oder Division führt, nur wenn die Vectoren senkrecht zu einander sind, wieder zu einem Differenzvector, der senkrecht zu der Ebene der Factoren ist, während für das Product und den Quotienten der Vectorschenkel eines schiefen Winkels sich eine Summe aus einer Zahl und einem Vector, d. h. eine Hamilton'sche Quaternion ergiebt.

Eine solche Quaternion $\beta : \alpha$ lässt sich darstellen als ein zu der Ebene $\alpha\beta$ senkrechter Vector γ mit dem Exponenten $2\varphi : \pi$, wenn φ der Winkel $\alpha\beta$ ist. Diesen Vector γ kann man sich im Scheitel des Winkels $\alpha\beta$ angebracht denken. Werden daher α und β einander parallel, so fällt γ ins Unendliche und erhält überdiess den Exponenten Null, der Abstand der Vectoren mag sein, welcher er will.

Als neuer und zur Verwendung mehr geeigneter Ausdruck für den Quotienten solcher parallelen und gleichen Vectoren ergiebt sich dann aber der Abstand ab der Anfänge dieser Vectoren, und allgemein lässt sich der Quotient der parallelen Vectoren β' und α' ausdrücken durch die longimetrische Quaternion $(T\beta' : T\alpha') \,.\, ab$ oder $(T\beta' : T\alpha') \,.\, (\mathrm{Cos}\, ab + j \mathrm{Sin}\, ab)$.

Die bei diesen Divisionen sich ergebenden Abstände ab sind aber nun Vectoren ganz andrer Art als die Differenzvectoren α und β. Denn während für Differenzvectoren der Satz gilt $ab + bc = ac$, ist jetzt $ab \,.\, bc = ac$; und es sind überhaupt diese Quotientvectoren, wie man dieselben nach ihrer Entstehung nennen kann, Operatoren, welche durch Multiplication einen Differenzvector verschieben. Auch neue Additionsgesetze ergeben sich für die Quotientvectoren, indem $ma \pm nb = (m \pm n)c$,

wo c nun ein Quotientvector ist, der auf der Verbindungslinie der Endpunkte von a und b endet und den Abstand dieser Punkte im Verhältniss von n : m theilt.

Aus dem Producte $a \,.\, b = c$ ergiebt sich leicht die Bedeutung einer Potenz a^m eines Quotientvectors, und diese führt dann zum Logarithmus eines Vectors in Bezug auf einen zweiten als Basis. Ein solcher Logarithmus ist eine goniometrische Quaternion, indem

$$^a\log b = (Tb : Ta)\ [\cos(a,b) + i \sin(a\,b)].$$

Lässt man in dem Quotienten der gleichlangen parallelen Differenzvectoren β' und α' die Vectoren sich der Grenze Null nähern, wodurch sich dieselben auf ihre Anfangspunkte b und a reduciren, so geht die Gleichung

$$\beta' : \alpha' = a\,b$$

über in

$$b : a = a\,b,$$

d. h. wir erhalten einen Werth für den Quotienten zweier Punkte und gelangen damit zu den Rechnungen zweiter Stufe mit Punkten. Indem wir $a^m \,.\, b^n = c^{m+n}$ setzen, wo c den Abstand ab im Verhältniss von n : m theilt, erhalten wir geradezu eine neue Art barycentrischen Calculs, worin aber die Punktelemente durch Multiplication und Division mit einander verbunden sind, statt durch Addition und Subtraction. Zugleich treten jetzt die Quotientvectoren als die Quotienten ihrer Endpunkte und als Multiplicationsoperatoren zur Verschiebung von Punkten auf.

Werden die Quotientvectoren parallel, so verlangen sie ebenfalls eine besondere Behandlung, um zu brauchbaren Resultaten zu führen. Sie ergeben dann in ihren Producten und Quotienten Werthe, die den Summen und Differenzen der parallelen Differenzvectoren analog sind, und führen beim Logarithmiren zu den longimetrischen Quaternionen zurück, indem

$$^{a'}\log b' = (Tb' : Ta') \,.\, a\,b.$$

Die Summen und Differenzen

$$m\,a' \pm n\,b' = (m \pm n)\,c'$$

sind dagegen Quotientvectoren, welche mit der Mittellinie des über a' und b' construirten Trapezes zusammenfallen.

Die Division eines von zwei einander kreuzenden Differenzvectoren durch den anderen führt zu einer Biquaternion, d. h. dem Producte aus einer longimetrischen und einer goniometrischen Quaternion. Dasselbe Resultat erhalten wir durch Logarithmirung eines Quotientvectors in Bezug auf einen kreuzenden Quotientvector als Basis.

2. — Aus Vorstehendem ersehen wir, dass nur Quotientvectoren durch alle Rechnungen der drei ersten Rechnungsstufen mit einander verbunden zu bestimmten, geometrisch deutbaren Ergebnissen führen, während die Logarithmirung der Differenzvectoren bis jetzt eine geometrische Deu-

tung nicht zuliess. Ein Grund hierzu liegt vielleicht darin, dass ${}^{\alpha}\log\beta$ nicht identisch ist mit dem Logarithmus von $\mathrm{m}\beta$ in Bezug auf die Basis $\mathrm{m}\alpha$, d. h., dass ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke für homologe Seitenpaare keine gleichen Logarithmen liefern. Damit ist aber eine geometrische Auffassung von ${}^{\alpha}\log\beta$ für die Zukunft noch durchaus nicht ausgeschlossen; es handelt sich nur darum, die Bedingungen der gegenseitigen Lage und Beschaffenheit von β und α zu ermitteln, für welche der Logarithmus den geeigneten algebraischen Ausdruck abgiebt.

Auch für Punkte haben wir den Fall der Potenzirung und Logarithmirung früher nicht weiter erwähnt, weil diese Verbindung zweier Punktelemente zu keinen wesentlich neuen Ergebnissen zu führen scheint. Man kann nämlich aus

$$^{\mathfrak{a}'}\log\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

einen Ausdruck für ${}^{\mathfrak{a}}\log\mathfrak{b}$ dadurch ableiten, dass man die gleichlangen und parallelen Quotientvectoren $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{a}'$ sich auf ihre Grenzen, d. h. ihre Anfangspunkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ reduciren lässt, und erhält damit

$$^{\mathfrak{a}}\log\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich dann

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}.$$

Leicht leitet man hieraus ab

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{b}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}\mathfrak{c}},$$

woraus wir die Grundgleichung der Quotientvectoren

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

folgern, wie wir denn auch leicht die übrigen für Quotientvectoren giltigen Sätze daraus ableiten könnten. Erwähnt mag noch werden, dass

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{d}} : \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{c}} = \mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

indem $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{d}} = \mathfrak{b}$, und der Quotient $\mathfrak{b} : \mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{b}$ ist. Wir hätten dadurch auch für den früher etwas unbestimmt gebliebenen Werth der Differenz zweier Quotientvectoren die Deutung gefunden, dass diese Differenz gleich dem Quotientvector ihrer Endpunkte ist, diesen Vector nun aber als einen Operator betrachtet, der durch Potenzirung einen Punkt um seine Länge und in seiner Richtung verschiebt.

Da den Punkten keine Grösse zukommt, so sind sie zur Einführung in die Rechnung nur dadurch geeignet, dass man sie entweder als Träger paralleler Vectoren auffasst und ihnen dann den Längen dieser Vectoren entsprechende Gewichte oder Intensitäten beilegt, oder indem man ihre relative Lage als quantitativ bestimmbares Element in Rechnung bringt. So sind wir denn dreimal auf den Vectorabstand der Punkte gelangt: bei der Subtraction, Division und Logarithmirung. Jedesmal erwächst aber dann diesem Abstand ein andres Amt: erst bewirkt er durch Addition, dann durch Multiplication, endlich durch Potenzirung die Verschiebung eines Punktes.

3. — Bezeichnen wir mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ einander schneidende, mit $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ dagegen parallele Differenzvectoren, mit a, b, c ... einander schneidende, mit a', b', c' ... dagegen parallele Quotientvectoren; lassen wir ferner q, Q und $\mathfrak{Q}$ bezüglich eine goniometrische, longimetrische und eine Biquaternion vorstellen, so können wir die Ergebnisse der Rechnung mit Vectoren übersichtlich in folgende Formeln zusammen fassen. Es ist

$$\alpha \pm \beta = \gamma; \quad \beta : \alpha = q_1; \quad \beta \,.\, \alpha = q_2; \quad \beta^{\alpha} = x; \quad {}^{\alpha}\log \beta = y,$$

wo wir mit x und y noch zu ermittelnde Werthe andeuten. Ebenso haben wir

$$m\alpha' \pm n\beta' = (m \pm n)\gamma'; \quad \beta' : \alpha' = Q_1; \quad \beta' \,.\, \alpha' = Q_2;$$
$$\beta'^{\alpha'} = x; \quad {}^{\alpha'}\log \beta' = y.$$

Ferner ist

$$ma \pm nb = (m \pm n) \,.\, c; \quad b \,.\, a = d; \quad b : a = e;$$
$${}^{a}\log b = q; \quad b^{a} = b',$$

wo b' parallel zu b zu denken ist. Sodann haben wir

$$ma' \pm nb' = (m \pm n)\, c'; \quad b' \,.\, a' = d'; \quad b' : a' = e';$$
$${}^{a'}\log b' = Q; \quad a'^{c} = b';$$

dagegen fehlt für $b'^{a'}$ eine Deutung.

Unter Voraussetzung kreuzender Vectoren haben wir endlich

$$\beta : \alpha = \mathfrak{Q} = Q \,.\, q,$$

und

$${}^{a}\log b = \mathfrak{Q}_1 = Q_1 \,.\, q_1,$$

während für die übrigen Rechnungen mit kreuzenden Vectoren noch kein in Vectoren oder Quaternionen einfach ausdrückbares Resultat festgestellt ist.

Das Product $b \,.\, \alpha$ aus einem Quotient- und einem Differenzvector kann als Factor aufgefasst werden, der einen zu α senkrechten Differenzvector dreht und verschiebt; dieselbe Wirkung bringt $b \,.\, \alpha$ an einem Quotientvector durch Potenzirung hervor.

4. — Die im Vorstehenden noch einmal übersichtlich vorgeführten Resultate der Rechnung mit Punkten und Vectoren gestatten leicht vielfache Verwendung bei geometrischen und mechanischen Untersuchungen. Dabei tritt fortwährend der Unterschied zu Tage zwischen Betrachtungen, worin der Punkt als Element auftritt, und denen, wobei die Gerade (als Tangente), oder die Ebene (als Berührungsfläche) das Element bildet, indem die Untersuchungen über Punktgebilde sich leichter mit schneidenden Vectoren und Gonioquaternionen führen lassen, wogegen die über Umhüllungsgebilde, oder mechanische Betrachtungen, mit Geraden und Ebenen als Elementen der Bewegung, sich geeigneter der parallelen Vectoren und der longimetrischen Quaternionen bedienen. Die Biquaternionen werden sich wol noch als brauchbares Werkzeug auf beiden Gebieten,

speciell aber bei räumlichen Untersuchungen verwenden lassen, in welchen die Gerade als Element eintritt, also besonders bei Regelflächen.

Ein wesentlicher Unterschied der Punkt- und Vectorrechnung von den Methoden der Coordinatengeometrie liegt darin, dass diese neuen Verfahrungsweisen unmittelbar an die zu untersuchenden Gebilde herantreten und mit den Elementen derselben direct rechnen, oder doch unter Zuziehung einfacherer Bestimmungsstücke operiren, als diess die analytische Geometrie bis jetzt gethan. Diese grössere Einfachheit der Untersuchung ist aber vorwiegend dadurch begründet, dass man die in Rechnung gezogenen Stücke nicht mehr bloss als Grössen, sondern noch mit anderen ihnen anhaftenden und quantitativ bestimmbaren wesentlichen Eigenschaften in die Rechnung einführt und so ihre Eigenthümlichkeiten gleichsam ergiebiger auswerthet, als diess bisher geschehen ist. Dadurch ist man aber in den Stand gesetzt, mit Zuziehung einer geringeren Anzahl von Bestimmungsstücken zu operiren, und zwar mit Zugrundelegung algebraischer Regeln, so dass das neue Verfahren die Methoden der sogenannten synthetischen und die der analytischen Geometrie vielfach vereint.

5. — Die Rechnung mit Vectoren, wie sie im vorliegenden Werke durchgeführt wurde, lässt sich als einen Versuch bezeichnen, diese geometrischen Gebilde nach ihrer Länge, Richtung und Stelle im Raume algebraisch zu verwerthen. Je nachdem man nämlich nur das eine oder das andre dieser Momente bei der Messung eines Vectors durch einen zweiten herausgreift, erhält man ein verschiedenes Resultat. So sind die im ersten Theile des Buches behandelten allgemeinen Winkelfunctionen und die longimetrischen Functionen Streckenquotienten, wobei im Wesentlichen nur deren Länge berücksichtigt wird.

Der auch in älteren Untersuchungen schon vorkommende Ausdruck

$$\beta : \alpha = (\mathrm{T}\beta : \mathrm{T}\alpha)\ (\cos \alpha\beta + \mathrm{i} \sin \alpha\beta)$$

enthält dagegen neben dem Verhältniss der absoluten Längen der Vectoren auch schon den Winkel derselben. Allein erst die von Hamilton eingeführte Auffassung des i als eines zur Ebene $\alpha\beta$ senkrechten Einheits-Vectors und die Unterscheidung verschiedener i stellten die Bedeutung des obigen Quotienten dahin fest, dass dadurch auch die Stellung der Ebene des Winkels bestimmt ist.

Indem aber Hamilton parallele Vectoren von gleicher Länge und Richtung als identisch auffasste, konnten parallele Ebenen nicht von einander geschieden werden. Diess geschieht erst durch die Einführung der longimetrischen Quaternionen und der Biquaternionen, welche letzteren nun als das Mass eines Vectors durch einen zweiten auftreten unter Berücksichtigung der relativen Länge dieser Strecken, der Grösse und Richtung

des Abstandes ihrer Anfänge, und endlich der Grösse ihres Winkels, nebst der Stellung der Winkelebene im Raume.

Nennen wir nun mit Hankel eine Zahl den Ausdruck der Beziehungen zweier Grössen zu einander, hier also zweier Vectoren, soweit diese Beziehungen quantitativen Messungen zugängig sind, so stellen sich die goniometrischen und longimetrischen Functionen ebensowol wie die Quaternionen und Biquaternionen als solche Zahlen heraus, die nur dadurch von einander abweichen, dass sie verschiedene Beziehungen der Vectoren, als deren Masszahlen sie auftreten, einzeln oder gleichzeitg zum Ausdruck bringen. Und damit erscheinen die Resultate unsrer Untersuchung auch als ein Beitrag zur Erweiterung der Theorie und des Gebietes der Zahlen.

§. 72. Geschichtliches.

1. — Die Rechnung mit Punkten und mit Vectoren, wie wir sie kennen gelernt haben, erstrebt die Verwirklichung eines genialen Gedankens, den Leibniz schon 1679 in einem Briefe an Huygens aussprach, indem er dort sagte: Je ne suis pas encore content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ni les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encore une autre analyse proprement geometrique ou lineaire qui nous exprime directement situm comme l'Algebre magnitudinem. Und an einer anderen Stelle: L'Algebre n'est autre chose que la characteristique des nombres indeterminés ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encore plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géometriquès assez commodes lors meme que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle characteristique ne peut manquer de donner en meme temps la solution et la construction et la demonstration géometrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse, c'est à dire par des voyes determinées. Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geometrie.

Was Leibniz von der erweiterten Algebra verlangt, wird vielfach von den Quaternionen geleistet; sie sind daher mindestens eine der Lösungen des von dem grossen Philosophen gestellten Problemes.

2. — Die frühesten Andeutungen über die Rechnung mit Vectoren liegen eigentlich schon in dem Gebrauche der positiven und negativen Zeichen für Strecken von entgegengesetzter Richtung. Diess geschah zuerst im Anfange des 17. Jahrhunderts durch A. Girard und durch

Cartesius. Doch erst unsrer Zeit war es vorbehalten, durch das feinfühlende mathematische Genie eines Möbius das Princip der Zeichen consequent auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik durchzuführen.

Ein weiterer Schritt auf diesem Felde waren die Andeutungen von Wallis (in seinen Werken vom Jahre 1693) über die Bedeutung des Imaginären bei der Lösung geometrischer Aufgaben. Er betrachtet schon $a\sqrt{-1}$ als die mittlere Proportionale zwischen $+a$ und $-a$ und zeigt, wie solche Werthe zu neuen Lösungen führen können, die aber auf einer Richtung zu suchen sind, die senkrecht zu der Richtung von a ist. Auch de Moivre's bekannter Satz rührt aus jener Zeit und war ein Schritt zur Verwendung des Imaginären, wie diese dann später durch Euler in ausgedehnterer Weise erfolgte. Aehnliche Ansichten wie die von Wallis wurden von Kühn (1753), Truel (1786) und Ruée (1806) veröffentlicht; der wahre Begründer der Darstellung complexer Zahlen von der Form $x + y\sqrt{-1}$ in der Ebene ist aber Argand (1806). Gauss entwickelte (1831) dieselben Ansichten, hob durch seine Autorität die Bedenken, die man noch dagegen hegte, und machte seine Auffassung zum Gemeingut der Mathematiker. Ausführlicheres hierüber und theilweise über das Folgende findet man in Hankel's Theorie der complexen Zahlensysteme.

3. — Die Entdeckung der Verwendbarkeit der Ausdrücke von der Form $x + y\sqrt{-1}$ bei Untersuchungen in der Ebene führte nothwendig zu Versuchen, auch Vectoren im Raume durch complexe Zahlen darzustellen; diess geschah in Deutschland durch die Arbeiten H. Grassmann's, durch Scheffler und durch Hankel, der in seinen alternirenden Zahlen eine Methode zur Darstellung räumlicher Strecken gab. Aber auch der barycentrische Calcul von Möbius (1827) gab schon Mittel zur Darstellung von Punkten im Raume und ist jedenfalls von dem grössten Einfluss auf die Entwickelung eines Zweiges der Mathematik geworden, den sein Verfasser mit Vorliebe pflegte.

Seit 1833 beschäftigte sich W. R. Hamilton in Dublin neben einer Reihe andrer englischer Mathematiker mit Untersuchungen über die Rechnung mit Vectoren im Raume und ihrer Darstellung durch complexe Zahlen. Das Resultat dieser Arbeiten war bei Hamilton (1843) die Theorie der goniometrischen Quaternionen, nachdem er sich dazu entschlossen, für diese Quotienten das commutative Princip bei der Multiplication nicht mehr allgemein als giltig anzunehmen. Hamilton hat diese Lehren in vielen Abhandlungen, namentlich aber in zwei grösseren Werken, den Lectures on Quaternions (1853) und in den Elements of Quaternions (1866) veröffentlicht. Ausserdem sind in England über diesen Gegenstand neben einer Menge kleinerer Schriften noch erschienen

Tait's Elements of Quaternions, in 2. Auflage 1873, und Kelland's Introduction to Quaternions (1873), wie denn die Quaternionen an den englischen Universitäten schon der. Stoff öffentlicher Vorlesungen und Gegenstand für die Prüfung der Candidaten in den mathematischen Wissenschaften geworden sind.

In Frankreich war Servois (1813) der Entdeckung der Quaternionen ganz nahe, indem er versuchte einen Einheitsvector im Raume auszudrücken durch

$$p \cdot \cos\alpha + q \cdot \cos\beta + r \cdot \cos\gamma$$

und die Frage aufwarf, ob p, q und r nicht von der Form $a + bi$ sein könnten.

Auch Cauchy hat seit 1853 Untersuchungen veröffentlicht und zum Theil in Vorlesungen an der Sorbonne behandelt, die ähnliche Zwecke verfolgen, wie die Quaternionen. So bezeichnet er eine quantité géometrique $\bar{r}$, die er eine afixe nennt, mit

$$\bar{r} = hx + iy + jz$$

und giebt den Richtungscoefficienten h, i, j die Namen clefs des axes, während er auch an $\bar{r}$ eine Richtung (clef) und eine Länge (module) unterscheidet.

In Deutschland ist die Theorie der Quaternionen zuerst in Hankel's Buch über complexe Zahlen (1867) behandelt worden. Der Verfasser des vorliegenden Werkes verdankt demselben vielfache Anregung, nachdem er schon seit 1864 sich mit dem Gedanken der Ausmittelung eines Werthes j trug, welcher in der Geometrie der Geraden und der Ebene eine ähnliche Rolle spielte, wie i in den Untersuchungen, bei denen der Punkt das Element abgiebt. Im Osterprogramm (1871) des hiesigen Realgymnasiums finden sich erfolglose Versuche angedeutet über die Einführung des j bei longimetrischen Functionen. Erst im Winter 1873—74 ergab sich die Bedeutung des j, und von da an stellten sich die im vorliegenden Werke mitgetheilten Resultate allmälig ein.

Ob schon von andrer Seite die allgemeinen goniometrischen und die longimetrischen Functionen, sowie die longimetrischen Quaternionen und Biquaternionen behandelt wurden, ist dem Verfasser nicht bekannt. J. T. Graves hat Ausdrücke untersucht von der Form

$$x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \ldots + x_7 i_7,$$

die er Octaven nennt, während Kirkmann denselben den Namen Biquaternionen giebt. Dieselben unterscheiden sich aber wesentlich von den Biquaternionen dieses Werkes dadurch, dass die Einheiten $i_1, i_2 \ldots i_7$ zum Quadrate erhoben -1 ergeben.

Druck von Carl Ritter in Wiesbaden.

Acme
Bookbinding Co., Inc.
Street
Boston 02210